BAC 2007

Pro–Didactica

Testare Naţională

Rezolvările variantelor 1–5

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

Cuprins

CAPITOLUL 1

Varianta 1

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $323 + 121 = \boxed{444}$.
2. Mai mare este numărul $\boxed{a = 3052}$.
3. Restul împărţirii numărului $120 = 7 \cdot 17 + 1$ la 7 este $\boxed{1}$.
4. Dintre numerele $\frac{3}{4}$ şi -32, numărul întreg este $\boxed{-32}$.
5. Media geometrică a două numere a, b este $m_g = \sqrt{ab}$. Deci media geometrică a numerelor 25 şi 4 este $\sqrt{25 \cdot 4} = \sqrt{100} = \boxed{10}$.
6. Perimetrul unui pătrat este de 4 ori lungimea laturii pătratului, de unde lungimea laturii este perimetrul împărţit la 4. In cazul de faţă lungimea laturii pătratului de perimetru 8 cm este $\frac{8}{4} = \boxed{2}$ cm.
7. $V_{\text{sferei}} = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 3^3}{3} = \boxed{36}\pi \text{ cm}^3$.
8. Lungimea diagonalei cubului cu muchia de lungime a este $a\sqrt{3}$. Deci pentru un cub de muchie 2 avem lungimea diagonalei cubului egală cu $\boxed{2\sqrt{3}}$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{B}$: Inecuaţia $3x - 6 \leq 0$ este echivalentă cu $x \leq \frac{6}{3}$ sau $x \leq 2$. Deci mulţimea soluţiilor inecuaţiei este intervalul $\boxed{(-\infty, 2]}$.
10. $\boxed{D}$: $E(6) = (6-7)^2 + |4-6| = (-1)^2 + |-2| = 1 + 2 = \boxed{3}$.
11. $\boxed{A}$: Raza cercului circumscris unui hexagon regulat este egală cu latura hexagonului. Deci raza cercului este în cazul nostru $6\ cm$. Ştiind ca $L_{\text{cerc}} = 2\pi r$ avem $L_{\text{cerc}} = 2\pi \cdot 6 = \boxed{12\pi}$.
12. $\boxed{A}$: Lungimea liniei mijlocii a unui trapez este media aritmetică a bazelor. In cazul de faţă lungimea liniei mijlocii este $\frac{8+10}{2} = \boxed{9}$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Cum $a \cdot b \cdot c = 4$, unde a, b, c sunt cifre în baza zece, avem

$$\boxed{A = \{114, 141, 411, 122, 212, 221\}}.$$

b. Numerele din mulţimea A divizibile cu 3 sunt: $114, 141, 411$ şi cum A are in total 6 elemente, probabilitatea ca alegând la întâmplare un număr din mulţimea A, acesta să fie divizibil cu 3 este $\frac{3}{6} = \boxed{\frac{1}{2}}$.

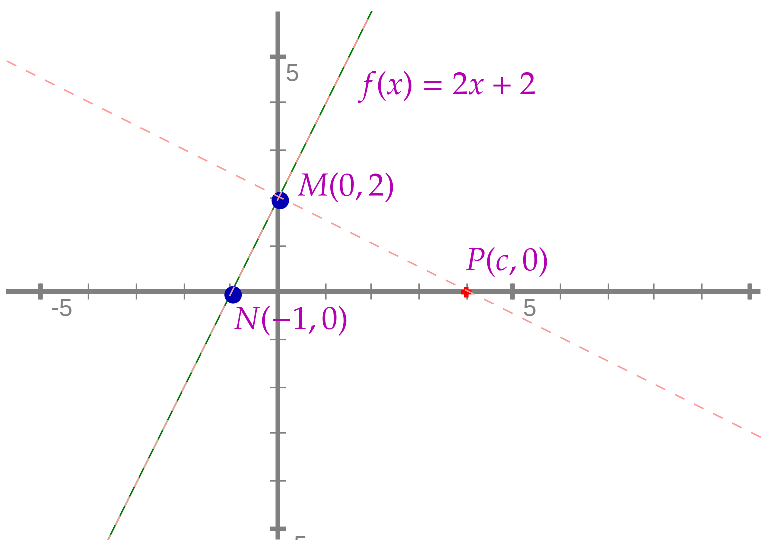
14. a. Formăm un sistem din ecuaţiile

$$f(2) = 6, \ f(3) = 8$$

Cum $f(2) = 2a + b$ şi $f(3) = 3a + b$ sistemul devine:

$$\begin{aligned} 2a + b &= 6 \\ 3a + b &= 8 \end{aligned}$$

Scăzând prima ecuaţie din a doua avem $a = \boxed{2}$, de unde $b = 6 - 2a = 6 - 4 = \boxed{2}$.



b.

c. **Prima soluţie.** Calculăm

$$\begin{aligned} MN &= \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \\ MP &= \sqrt{c^2 + 2^2} = \sqrt{c^2 + 4} \\ NP &= |1 + c| \end{aligned}$$

Cum vrem ca MN şi MP să fie perpendiculare, înseamnă că triunghiul NMP trebuie să fie dreptunghic în M. Or aceasta este echivalent cu $NM^2 + MP^2 = NP^2$, sau

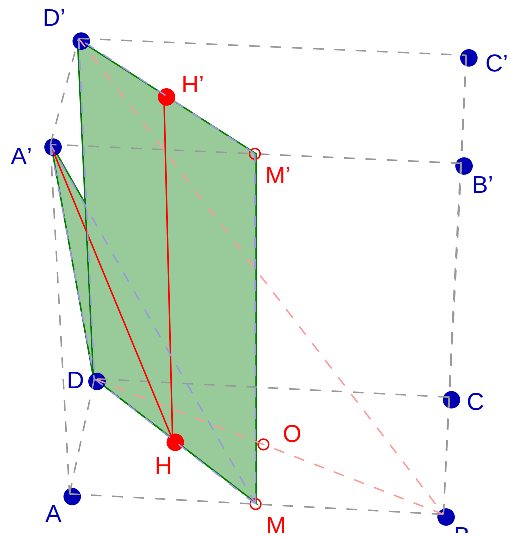
$$(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{c^2 + 4})^2 = |1 + c|^2$$

După ridicarea la pătrat avem: $5 + c^2 + 4 = 1 + 2c + c^2$ sau $2c - 8 = 0$, de unde $\boxed{c = 4}$.

A doua soluţie. Triunghiul MNP are unghiul $\widehat{NMP}$ drept dacă şi numai dacă

$$MO^2 = NO \cdot PO$$

sau $2^2 = 1 \cdot c$, de unde $\boxed{c = 4}$.



15. a.

b. OM fiind linie mijlocie în ΔABD este paralelă cu AD. AD este perpendiculară pe dreptele concurente AA' şi AB, deci este perpendiculară pe planul ABA'. Atunci $AD \perp A'B$ şi în consecinţă $OM \perp A'B$.

c. Proiecţia lui BD' pe planul (ABC) este BD. Deci unghiul dintre BD' şi planul ABC este $\widehat{DBD'}$. Cum $BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} = DD'$, triunghiul BDD' este dreptunghic isoscel. Deci $\boxed{\widehat{D'BD} = 45°}$.

d. Fie M' mijlocul lui $A'B'$, H mijlocul lui MD, iar H' mijlocul lui $M'D'$. Triunghiul AMD este isoscel cu $AM = AD = 3$ cm. Atunci $AH \perp MD$ şi în consecinţă $A'H \perp MD$. Unghiul dintre cele planele $(A'DM)$ şi $(D'DM)$ este $\widehat{A'HH'}$. In triunghiul dreptunghic isoscel $\Delta A'D'M'$, de latură 3, avem $A'H' = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Atunci $\operatorname{tg}\widehat{A'HH'} = \frac{A'H'}{HH'} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{3\sqrt{5}} = \boxed{\frac{\sqrt{10}}{10}}$.

CAPITOLUL 2

Varianta 2

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $26 \cdot 3 = \boxed{78}$
2. $73 = 14 \cdot 5 + 3$, deci câtul împărţirii lui 73 la 5 este $\boxed{14}$.
3. Avem $5\sqrt{2} = \sqrt{50}$ şi $2\sqrt{6} = \sqrt{24}$. Deci mai mare este $\boxed{5\sqrt{2}}$.
4. Un divizor al numărului 35 (şi al oricărui alt număr întreg) este $\boxed{1}$.
5. Suplementul unghiului cu măsura $60°$ este unghiul cu măsura de $180° - 60° = \boxed{120°}$.
6. $\text{Aria}_{\Delta\text{dreptunghic}} = \dfrac{\text{produsul lungimilor catetelor}}{2} = \dfrac{10 \cdot 12}{2} = \boxed{60\,\text{cm}^2}$
7. Lungimea diagonalei unui cub cu muchia a este $a\sqrt{3}$, deci răspunsul este $\boxed{8\sqrt{3}}$.
8. $V_{\text{cilindru}} = \pi r^2 \cdot h = \pi 4^2 \cdot 7 = \boxed{112\pi\,\text{cm}^3}$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{B}$: $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2 \cdot x \cdot \dfrac{1}{x} - 2 \cdot x \cdot \dfrac{1}{x} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 2 = 7^2 - 2 = 47$.
10. $\boxed{B}$: Cum $A(2,3)$ aparţine graficului funcţiei f avem $f(2) = 3$, echivalent cu $2a - 3 = 3$, de unde $a = \dfrac{6}{2} = 3$.
11. $\boxed{C}$: Simetricul punctului de coordonate (a,b) faţă de origine este punctul de coordonate $(-a,-b)$. Deci simetricul lui $(-3,-2)$ faţă de origine este $(3,2)$.
12. $\boxed{D}$: Se ştie ca suma unghiurilor unui poligon convex cu n laturi este $(n-2) \cdot 180°$. Poligonul regulat cu 6 laturi se numeste hexagon regulat şi conform formulei precedente are suma unghiurilor egală cu $4 \cdot 180° = 720°$, de unde măsura unui unghi este $\dfrac{720°}{6} = 120°$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Suma celor două numere este dublul mediei aritmetice, adică $2 \cdot 7,5 = \boxed{15}$.

b. Fie a şi b numerele cerute. Conform ipotezei, avem media aritmetică $\frac{a+b}{2} = 7,5$, iar media geometrică $\sqrt{ab} = 6$. Pentru a găsi a şi b rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} & = & 7,5 \quad (1) \\ \sqrt{ab} & = & 6 \quad (2) \end{cases}$$

Din ecuaţia (1) avem $a = 15 - b$. Inlocuind a în a doua ecuaţie şi ridicând la pătrat avem $(15-b)b = 36$ echivalent cu $-b^2 + 15b - 36 = 0$. Discriminantul este

$$\Delta = 15^2 - 4 \cdot 36 = 225 - 144 = 81$$

de unde $b_1 = \frac{-15+9}{-2} = 3$ şi $b_2 = \frac{-15-9}{-2} = 12$. Pentru $b = 3$, avem $a = 12$ şi pentru $b = 12$, avem $a = 3$. Deci cele doua numere sunt 12 şi 3. Numărul mai mic 3, reprezintă $\frac{3}{12} = 0,25 = \boxed{25\%}$ din cel mare 12.

14. a. Avem $(x+2)(2x-3) = 2x^2 - 3x + 2x - 6 = 2x^2 - x - 6$ ceea ce demonstrează relaţia cerută.

b.

$$\begin{aligned} E(x) &= \left(\frac{x-6}{x^2-25} - \frac{x}{5-x} - \frac{2}{x+5}\right) : \frac{2x^2+x-6}{x^2-25} \\ &= \left(\frac{x-6}{x^2-25} + \frac{x(x+5)}{(x+5)(x-5)} - \frac{2(x-5)}{(x+5)(x-5)}\right) \cdot \frac{x^2-25}{2x^2+x-6} \\ &= \frac{x-6+x^2+5x-2x+10}{2x^2+x-6} \overset{(a)}{=} \frac{x^2+4x+4}{(x+2)(2x-3)} \\ &= \frac{(x+2)^2}{(x+2)(2x-3)} = \frac{x+2}{2x-3} \end{aligned}$$

c. Cum $E(a)$ nu este bine definit pentru $a = -2$, rezultă că $E(a) \neq 0$. De asemenea observăm că $E(0) = -\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$. Studiem cazurile

- $a > 0$: Calculăm mai întâi $E(1) = -3 \in \mathbb{Z}$. Pentru $a \geq 2$ observăm că pentru a fi întreg, numărul pozitiv $E(a)$ trebuie să fie ce puţin 1. Ţinând minte că acum $a \geq 2$, inecuaţia $\frac{a+2}{2a-3} \geq 1$ este echivalentă cu $a + 2 \geq 2a - 3$, sau $5 \geq a$. Dar $a = 5$ nu este în domeniul de definiţie al lui E, deci mai avem de calculat doar $E(2) = 4 \in \mathbb{Z}$, $E(3) = \frac{5}{3} \notin \mathbb{Z}$ şi $E(4) = \frac{6}{5} \notin \mathbb{Z}$.
- $a < 0$: Calculăm $E(-1) = -\frac{1}{5}$. Pentru $a \leq -3$ (ne aducem aminte că $a = -2$ nu este în domeniul de definiţie al lui E) fie $b = -a > 0$.

Atunci $0 < E(a) = \dfrac{a+2}{2a-3} = \dfrac{b-2}{2b+3} < 1$, deci $E(a)$ nu este întreg în acest caz.

Deci singurele soluţii ale acestui punct sunt $\boxed{a \in \{1, 2\}}$.

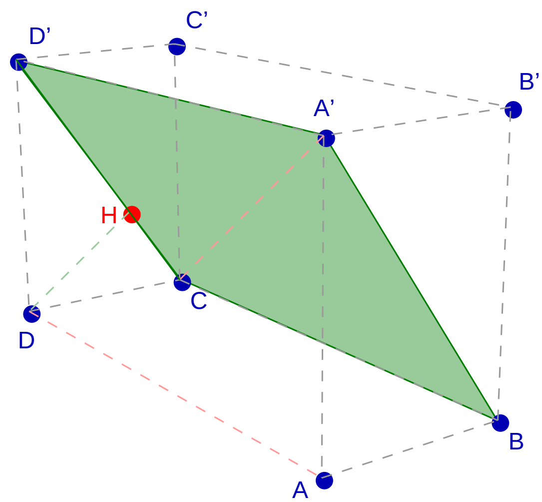


Figura 1. Exerciţiul 15.

15. a.

b. Demonstrăm că patrulaterul $ABC'D'$ este dreptunghi. Cum AB şi $C'D'$ sunt paralele şi egale, rezultă că patrulaterul $ABC'D'$ este paralelogram. Apoi $C'D'$ este perpendiculară pe planul $ADD'A'$, este şi pe AD'. Paralelogramul $ABC'D'$ având un unghi drept este dreptunghi şi aria sa este

$$192 = Aria_{ABC'D'} = AD' \cdot AB \qquad (1)$$

Folosind teorema lui Pitagora în $\Delta ADD'$ avem

$$\begin{aligned} AD' &= \sqrt{DD'^2 + AD^2} = \sqrt{(8\sqrt{2})^2 + (8\sqrt{7})^2} \\ &= \sqrt{64 \cdot 2 + 64 \cdot 7} = \sqrt{64 \cdot 9} = 8 \cdot 3 = 24 \end{aligned}$$

Revenind acum la relaţia (1), avem $24 \cdot AB = 192$, de unde $AB = \dfrac{192}{24} = 8$.

c. Cum $AD \| BC$, unghiul format de $A'C$ cu AD este unghiul format de $A'C$ cu BC, adica unghiul $\widehat{A'CB}$. Avem $BC \perp BB'$ şi $BC \perp AB$, deci $BC \perp (ABB'A')$ şi cum $A'B$ este inclusă în $(ABB'A')$ rezultă că $CB \perp A'B$. Astfel in triunghiul dreptunghic $A'BC$ avem $\operatorname{tg} \widehat{A'CB} = \dfrac{A'B}{BC}$. Avem $A'B = \sqrt{A'A^2 + AB^2} = \sqrt{8^2 + (8\sqrt{2})^2} = 8\sqrt{3}$ şi atunci

$$\operatorname{tg} \widehat{A'CB} = \frac{8\sqrt{3}}{8\sqrt{7}} = \boxed{\frac{\sqrt{21}}{7}}$$

d. Planul $(A'BC)$ este de fapt planul $(A'D'BC)$. Fie H piciorul perpendicularei din D pe CD'. Cum $DH \perp CD'$ şi $DH \perp BC$ (căci BC este perpendicular pe planul în care este DH) rezultă că DH este perpendicular pe planul $(A'D'CB)$. Din triunghiul dreptunghic $DD'C$ avem

$$DH = \frac{D'D \cdot CD}{D'C} = \frac{8 \cdot 8\sqrt{2}}{8\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{6}}{3}$$

Deci distanţa de la D la planul $(A'BC)$ este $\boxed{\frac{8\sqrt{6}}{3}}$.

CAPITOLUL 3

Varianta 3

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $405 : 5 = \boxed{81}$
2. Fracţia supraunitară din mulţimea $\left\{\frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{4}{8}\right\}$ este $\boxed{\frac{4}{3}}$.
3. Soluţia reală a ecuaţiei $x - 4 = 7$ este $x = 7 + 4 = \boxed{11}$.
4. Descompus în factori primi numărul 18 este egal cu $\boxed{2 \cdot 3^2}$.
5. $\text{Aria}_{\text{romb}} = \frac{\text{produsul diagonalelor}}{2} = \frac{12 \cdot 24}{2} = \boxed{144}\,\text{cm}^2$.
6. $\text{Perimetru}_{\text{dreptunghi}} = 2(\text{lungimea} + \text{lăţimea}) = 2(8+4) = \boxed{24}$ cm.
7. $\text{Aria}_{\text{sferei}} = 4\pi r^2 = 4\pi 5^2 = \boxed{100}\,\pi\,\text{cm}^2$.
8. Paralelipipedul dreptunghic este o prismă dreaptă cu baza dreptunghic şi are ca volum $6 \cdot 4 \cdot 3 = \boxed{72}\,\text{cm}^3$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{C}$: Avem $\frac{2}{3} : 2^2 + \frac{5}{6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{6} = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$
10. $\boxed{C}$: $E(-2) = (-2+3)^2 - 3 = 1 - 3 = -2$
11. $\boxed{B}$: Fie $M(x,y)$ punctul comun graficelor funcţiilor f şi g. Coordonatele (x,y) ale punctului M sunt soluţiile sistemului:

$$\begin{cases} y = 3 - 4x & (1) \\ y = 2x - 21 & (2) \end{cases}$$

Inlocuind y din ecuaţia (1) în ecuaţia (2) avem: $3 - 4x = 2x - 21$ echivalent cu $-6x = -24$, de unde $x = 4$. Pentru $x = 4$ avem $y = 3 - 4 \cdot 4 = -13$.

12. $\boxed{B}$: Avem $AD = AB + BC + CD \overset{AB=CD}{=} 2AB + BC$. Inlocuind $AD = 15$ şi $BC = 3$ avem $15 = 2AB + 3$, de unde $2AB = 12$ sau $AB = 6$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Pentru orice mulţime finită X vom nota cu $|X|$ numărul elementelor sale. Fie A mulţimea elevilor care cunosc limba franceză şi B mulţimea elevilor care cunosc limba engleză. Vrem să aflăm numărul $|A \cap B|$ de elemente ale lui $A \cap B$. Ştim că

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Cum fiecare dintre elevi cunoaşte cel puţin una dintre limbi, $A \cup B$ reprezintă mulţimea elevilor din clasa a VIII-a adică $|A \cup B| = 160$. Avem deci: $160 = 82+120-|A\cap B|$, de unde $|A\cap B| = 82+120-160 = 202-160 = \boxed{42}$.

b. Pentru a afla numărul elevilor care cunosc numai franceza, scădem din numărul elevilor care cunosc franceza, numărul elevilor care cunosc şi franceza şi engleza, adică $82 - 42 = \boxed{40}$.

14. a. Pentru $m = 0$ ecuaţia devine $-x = 0$ care are soluţia $\boxed{x = 0}$.

b. Pentru $m = -2$ ecuaţia devine $-2x^2 - 5x - 2 = 0$ sau (după înmulţire cu -1), $2x^2 + 5x + 2 = 0$. Discriminantul este $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9$ şi $x_1 = \dfrac{-5-3}{4} = \boxed{-2}$, $x_2 = \dfrac{-5+3}{4} = \boxed{-\dfrac{1}{2}}$

c. Pentru ca ecuaţia să aibă două soluţii, trebuie să fie în primul rând de gradul doi, deci $m \neq 0$. Pentru ca aceste soluţii să fie reale şi diferite trebuie ca discriminantul $\Delta = (2m-1)^2 - 4m^2 = -4m + 1$ să fie strict pozitiv. Rezolvând această inecuaţie avem $m < \dfrac{1}{4}$. Dar am văzut că $m \neq 0$, deci soluţia problemei este

$$m \in \boxed{(-\infty, 0) \cup \left(0, \tfrac{1}{4}\right)}$$

15. a. Vezi pagina următoare.

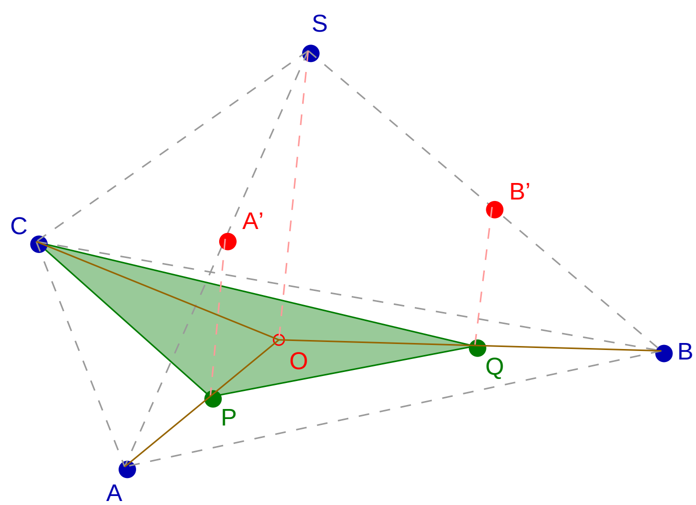


FIGURA 1. Exerciţiul 15.

b. Fie a lungimea laturii triunghiului echilateral care este baza piramidei triunghiulare regulate. In triunghiul SBC, SM este mediană şi cum triunghiul este isoscel, SM este şi înălţime. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic SMC avem: $SM = \sqrt{SC^2 - MC^2} = \sqrt{72 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$. AM este înălţime în triunghiul echilateral ABC şi are lungimea egală cu $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Din ipoteză triunghiul ASM este dreptunghic şi aplicând teorema lui Pitagora aveam: $AM^2 = SA^2 + SM^2$ sau $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = (6\sqrt{2})^2 + \left(72 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)$. Efectuând ridicările la pătrat avem: $\frac{3a^2}{4} = 72 + 72 - \frac{a^2}{4}$ ceea ce este echivalent cu $a^2 = 144$ sau $a = 12$. Arătăm în continuare că lungimile laturilor triunghiul SAC verifică relaţia: $AC^2 = SA^2 + SC^2$ de unde conform reciprocei teoremei lui Pitagora deducem ca triunghiul este dreptunghic. Intr-adevăr $AC^2 = SA^2 + SC^2$ este echivalent cu $144 = (6\sqrt{2})^2 + (6\sqrt{2})^2$ sau $144 = 72 + 72$ ceea ce este adevărat. Prin urmare triunghiul SAC este dreptunghic.

c. Piramida fiind triunghiulară regulată triunghiurile SAB, SAC şi SBC sunt congruente. Conform celor demostrate la punctul anterior, triunghiurile SAB, SAC şi SBC sunt dreptunghice şi isocele. Deci $SB \perp SC$ şi $SB \perp SA$, de unde deducem că $SB \perp (SAC)$ (perpendiculară pe două drepte concurente din plan). Prin urmare avem

$$\begin{aligned} V_{SABC} &= \frac{1}{3} Aria_{\Delta SAC} \cdot SB = \frac{1}{3} \cdot \frac{SA \cdot SC}{2} \cdot SB \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{6\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2}}{2} \cdot 6\sqrt{2} = \boxed{72\sqrt{2}} \end{aligned}$$

d. Fie O intersecţia medianelor triunghiului ABC. Proiecţia muchiei SA este OA iar proiecţia muchiei SB este OB. Punctul P va fi la mijlocul lui OA iar Q la mijlocul lui OB. Fiecare din triunghiurile ΔOAB, ΔOBC şi OCA are aria o treime din aria triunghiului ΔABC. Avem

$$\begin{aligned} \text{Aria}_{\Delta OPC} &= \frac{1}{2} \cdot \text{Aria}_{\Delta OAC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \text{Aria}_{\Delta ABC} \\ \text{Aria}_{\Delta OQC} &= \frac{1}{2} \cdot \text{Aria}_{\Delta OBC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \text{Aria}_{\Delta ABC} \\ \text{Aria}_{\Delta OPQ} &= \frac{1}{4} \cdot \text{Aria}_{\Delta OAB} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \text{Aria}_{\Delta ABC} \end{aligned}$$

Adunând aceste relaţii, obţinem

$$\text{Aria}_{\Delta CPQ} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right) \text{Aria}_{\Delta ABC}$$

Cum latura triunghiului echilateral ΔABC este $l = 12$, aria sa este $\text{Aria}_{\Delta ABC} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}$. Deci

$$\text{Aria}_{\Delta CPQ} = \frac{5}{12} \cdot 36\sqrt{3} = \boxed{15\sqrt{3}}.$$

CAPITOLUL 4

Varianta 4

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. Avem $32 : 4 - 7 = 8 - 7 = \boxed{1}$.
2. Cel mai mic număr natural scris în baza 10, de forma $\overline{23x}$ este $\boxed{230}$.
3. Media geometrică a numerelor a şi b este $\sqrt{ab}$, deci în cazul nostru $\sqrt{2 \cdot 50} = \sqrt{100} = \boxed{10}$.
4. $\frac{3}{4} \cdot 120 = \boxed{90}$.
5. Suplementul unghiului de $70°$ este $180° - 70° = \boxed{110°}$.
6. Conform teoremei lui Pitagora lungimea celeilalte catete este
$$\sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{289 - 225} = \sqrt{64} = \boxed{8}.$$
7. O prismă dreaptă cu baza hexagon regulat are un număr de $\boxed{18}$ muchii.
8. $V_{\text{cilindru}} = \pi R^2 \cdot G = \pi 3^2 \cdot 9 = \boxed{81}\pi$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{C}$: Avem $E(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 + (2+2)(2-3) = 4 - 10 + 6 - 4 = -4$.
10. $\boxed{B}$: $|\sqrt{3} - \sqrt{5}| + \sqrt{5} + \sqrt{3} = \sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{3} = 2\sqrt{5}$.
11. $\boxed{C}$: Fie V_1 volumul unui cub de latura a_1 şi V_2 volumul unui cub de latura a_2, avem $\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$. Presupunând că densităţile celor două cuburi sunt aceleaşi avem şi $\frac{M_1}{M_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$, unde M_1, M_2 sunt masele celor două cuburi. Deci $\frac{7}{M_2} = (\frac{1}{3})^3$, de unde $M_2 = 7 \cdot 27 = 189$ kg.
12. $\boxed{A}$: Avem $P_{BMNC} = BM + MN + NC + BC \overset{BM=NC}{=} 2BM + MN + BC$. MN fiind linie mijlocie în triunghiul ABC are lungimea egală cu $\frac{BC}{2} = \frac{15}{2}$. Revenim la calculul perimetrului avem: $P_{BMNC} = 2BM + MN + BC = 2\frac{15}{2} + \frac{15}{2} + 15 = 30 + \frac{15}{2} = 30 + 7,5 = 37,5$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Fie a numărul apartamentelor cu două camere şi b numărul apartamentelor cu trei camere. Din ipoteză ştim că în bloc exista 28 apartamente cu două şi trei camere, adică

$$a + b = 28 \qquad (1)$$

şi că sunt în total 76 de camere, ceea ce revine la

$$2a + 3b = 76 \qquad (2)$$

Scăzând dublul ecuaţiei (1) din ecuaţia (2) obţinem $b = 76-2\cdot 28 = 76-56 = 20$ apartamente cu trei camere. Avem astfel $a = 28-b = 28-20 = \boxed{8}$ apartamente cu două camere.

b. Avem $\dfrac{8}{20} = 0,4 = \boxed{40\%}$.

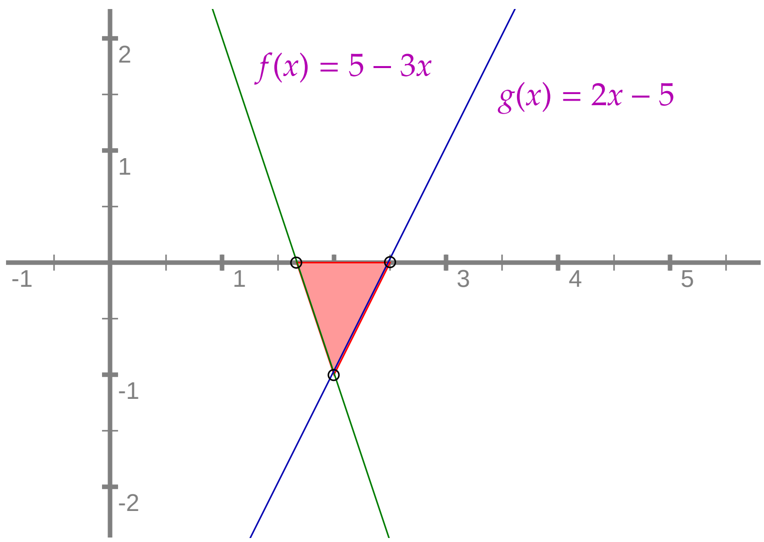


Figura 1. Exerciţiul 14.

14. a.

b. Determinăm coordonatele punctului de intersecţie M al graficului funcţiei f cu graficul funcţiei g rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} y = 5 - 3x & (1) \\ y = 2x - 5 & (2) \end{cases}$$

Inlocuind y din ecuaţia (1) în ecuaţia (2) obţinem: $5 - 3x = 2x - 5$ sau $-5x = -10$ ceea ce dă $x = 2$. Pentru $x = 2$ avem $y = 5 - 3\cdot 2 = -1$, deci punctul de intersecţie al celor două grafice este $M(2, -1)$. Aria cuprinsă între axa ordonatelor şi reprezentările grafice ale funcţiilor f şi g este aria unui triunghi cu lungimea bazei 10 şi lungimea înălţimii 2. Avem deci $Aria = \dfrac{10\cdot 2}{2} = \boxed{10}$.

c. Observăm că de la 3 la 102 sunt 100 de numere. Suma de calculat este

$$\begin{aligned} s &= g(3) + g(4) + g(5) + ... + g(102) \\ &= (2 \cdot 3 - 5) + (2 \cdot 4 - 5) + (2 \cdot 5 - 5) + ... + (2 \cdot 102 - 5) \\ &= 2(3 + 4 + 5 + ... + 102) - 5 \cdot 100 \end{aligned}$$

Folosind formula: $1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$, avem: $3+4+5+...+102 = (1+2+3+4+5+...+102) - (1+2) = \frac{102 \cdot 103}{2} - 3 = 5253 - 3 = 5250$.

Prin urmare $s = 2 \cdot 5250 - 500 = 10500 - 500 = \boxed{10,000}$.

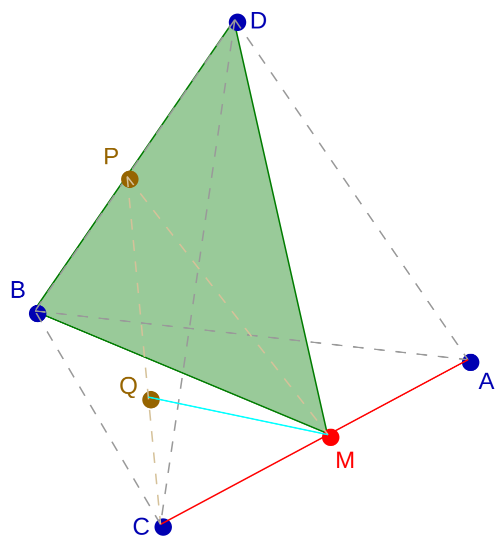


FIGURA 2. Exerciţiul 15.

15. a.

b. Cum M este mijlocul lui AC, segmentele BM şi DM sunt mediane in triunghiurile ABC, respectiv ADC. Triunghiurile ABC şi ADC sunt echilaterale, deci mediana este şi înălţime. Avem deci $BM \perp AC$ şi $DM \perp AC$, de unde rezultă că $AC \perp (BMD)$ (dreapta perpendiculară pe două drepte concurente din plan este perpendiculară pe plan).

c. Segmentele BM şi DM sunt ambele înălţimi într-un triunghi echilateral de latura a, deci au lungimea $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Fie P mijlocul lui BD. Triunghiul BMD fiind isoscel, MP este perpendicular pe BM. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic BMP avem $PM = \sqrt{BM^2 - BP^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Atunci $\text{Aria}_{\Delta BMD} = \frac{BD \cdot MP}{2} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{2} = \boxed{\frac{a^2\sqrt{2}}{4}}$.

d. Fie MQ înălţimea triunghiului PMC. Avem $MQ \perp PC$, $PC \perp BD$ şi $MP \perp BD$. Conform celei de a doua reciproce a teoremei celor trei perpendiculare rezultă că $MQ \perp (BCD)$. Deci distanţa de la punctul M la planul (BCD) este MQ. Triunghiul PMC fiind dreptunghic ($AC \perp PM$) avem $Aria_{PMC} = \dfrac{PM \cdot MC}{2}$ (produsul catetelor supra 2) sau $Aria_{PMC} = \dfrac{PC \cdot MQ}{2}$ (baza ori înălţimea supra 2). Din egalitatea ariilor avem: $\dfrac{PM \cdot MC}{2} = \dfrac{PC \cdot MQ}{2}$ echivalent cu $\dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{a}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot MQ$ sau $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{a\sqrt{3} \cdot MQ}{2}$. Rezultă $MQ = \dfrac{2a^2\sqrt{2}}{4a\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \boxed{\dfrac{a\sqrt{6}}{6}}$.

CAPITOLUL 5

Varianta 5

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $10 + 20 = \boxed{30}$
2. $\frac{52}{10} = \boxed{\frac{26}{5} = 5\frac{1}{5}}$
3. Ecuaţia se mai scrie $-2x = -5 - 1$, deci $x = \frac{-6}{-2} = \boxed{3}$.
4. $\boxed{2}$. **Notă:** Cel mai mic divizor par al oricărui număr par este 2.
5. $\frac{5+15}{2} = \boxed{10}$
6. $4 \cdot 12 = \boxed{48}$
7. $5^3 = \boxed{125}$
8. 48 (aria este 48π)

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{C}$: Ecuaţia se rescrie $3(2x + y) = 2(3x - y)$, sau $6x + 3y = 6x - 2y$, de unde $y = 0$.
10. $\boxed{C}$: Inecuaţia se rescrie $-x > 2 - 4 = -2$, de unde prin înmulţire cu -1 avem $x < 2$, sau $x \in (-\infty, 2)$.
11. $\boxed{B}$: Latura pătratului este $\sqrt{64} = 8$. Dacă l este lăţimea dreptunghiului, atunci $2(10 + l) = 4 \cdot 8$. Rezolvând ecuaţia obţinem $l = 6$.
12. $\boxed{A}$: $\widehat{DAB}$ şi $\widehat{ACB}$ sunt ambele complementul unghiului $\widehat{ABC}$. Deci $\widehat{DAB} = \widehat{ACB} = 30°$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Fie a vârsta lui Andrei şi v vârsta lui Vlad. Din ipoteze avem sistemul

$$\begin{aligned} a + v &= 21 \\ a - 3 &= \frac{v-3}{2} \end{aligned}$$

A doua ecuaţie se poate rescrie $v = 2a - 3$, substituim în prima ecuaţie şi obţinem $3a - 3 = 21$, de unde $a = 13$. De aici $v = 2 \cdot 8 - 3 = \boxed{13}$.

b. Fie t numărul de ani căutat. Din ipoteza $a + t = \frac{2}{3}(v + t)$, sau $3(8 + t) = 2(13 + t)$. Rezolvând ecuaţia găsim $\boxed{t = 2}$.

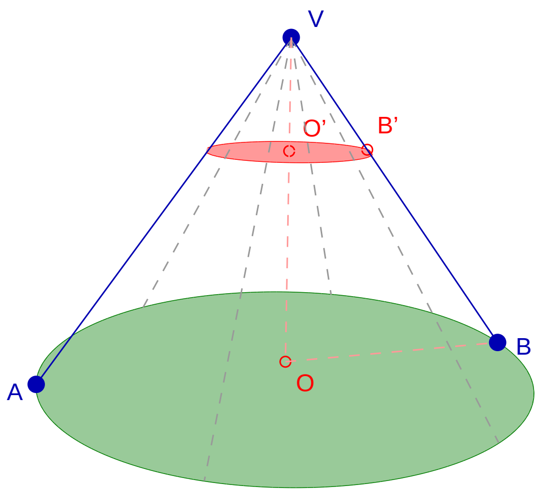
14. a. Faptul că punctele A şi B sunt pe graficul lui f , revine la sistemul

$$\begin{aligned} a(-1) + b &= 4 \\ a \cdot 2 + b &= -5 \end{aligned}$$

Scăzând prima ecuaţie din a doua, avem $3a = -9$, deci $\boxed{a = -3}$. Substiuim în oricare din cele două ecuaţii şi găsim $\boxed{b = 1}$.

b. Intersecţiile cu axele sunt punctele $(0, 1)$ şi $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$. Aria este atunci $\frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{2} = \boxed{\frac{1}{6}}$.

c. Condiţia din enunţ se traduce prin $-3m^2 + 1 = m - 3$. Scriem ecuaţia $-3m^2 + 3m - 4m + 4 = (m - 1)(-3m + 4) = 0$, de unde $\boxed{m_1 = 1, m_2 = -\frac{4}{3}}$.



15. a.

b. $\frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 8}{3} = \boxed{96\pi}$.

c. Fie E piciorul perpendicularei din A pe VB. Scriind aria triunghiului VAB în două moduri, avem $\frac{AE \cdot 10}{2} = \frac{8 \cdot 12}{2}$, de unde $AE = 9,6$. Atunci în triunghiul dreptunghic AVE, $\sin \widehat{AVB} = \frac{AE}{AV} = \frac{9,6}{10} = \boxed{0,96}$.

d. Fie O centrul cercului bază al conului şi O' centrul cercului obţinut ca secţiune. Distanţa căutată este OO'. Notăm cu B' intersecţia dreptei VB cu planul de secţiune. Din asemănarea triunghiurilor VOB şi $VO'B'$, avem $\frac{VO'}{VO} = \frac{O'B'}{OB}$, sau $O'B' = \frac{3 \cdot VO'}{4}$. Atunci volumul conului mic din vârf este dat de $\frac{\pi \cdot VO' \cdot O'B'^2}{3} = \frac{3\pi \cdot VO'^3}{16}$. Condiţia că raportul volumelor este 27, revine la

$$\frac{96\pi}{\frac{3\pi \cdot VO'^3}{16}} = 27$$

şi de aici $VO'^3 = \frac{32 \cdot 16}{27} = \frac{2^5 \cdot 2^4}{3^3} = \left(\frac{2^3}{3}\right)^3$, sau $VO' = \frac{8}{3}$. Răspunsul exerciţiului este $OO' = 8 - \frac{8}{3} = \boxed{\frac{16}{3}}$.