BAC 2007

Pro–Didactica

Testare Naţională

Rezolvările variantelor 91–95

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

Cuprins

CAPITOLUL 1

Varianta 91

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $2^2 : 2 = 4 : 2 = \boxed{2}$
2. $\boxed{4235}$
3. Dintre numerele $a = -18$ şi $b = -20$ mai mare este numărul $\boxed{a = -18}$.
4. Ecuaţia $2x - 1 = 1$ este echivalentă cu $2x = 2$, de unde $x = \dfrac{2}{2} = \boxed{1}$.
5. Cel mai mic număr natural de trei cifre divizibil cu 3 este numărul $\boxed{102}$. Reamintim că un număr este divizibil cu 3 dacă şi numai dacă suma cifrelor sale este divizibilă cu 3.
6. Suma unghiurilor unui triunghi fiind egală cu $180°$, dacă două dintre unghiurile triunghiului au măsurile $75°$ şi $30°$, atunci al treilea unghi al triunghiului are măsura $180° - (75° + 30°) = 180° - 105° = \boxed{75°}$.
7. Măsura unghiului înscris într-un cerc este egală cu jumătate din măsura arcului de cerc pe care îl subîntinde. Prin urmare, măsura unghiului înscris într-un cerc care subîntinde un arc cu măsura $60°$ este egală cu $\dfrac{60°}{2} = \boxed{30°}$.
8. Diagonala cubului cu muchia de lungime 4 cm are lungimea $\boxed{4\sqrt{3}}$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{D}$: Media geometrică a numerelor $a = (\sqrt{2} - 1) \cdot (\sqrt{5} + 1)$ şi $b = (\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt{5} - 1)$ este egală cu

$$\begin{aligned}\sqrt{ab} &= \sqrt{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{5}+1)(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)}\\ &= \sqrt{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}\\ &= \sqrt{[(\sqrt{2})^2 - 1^2][(\sqrt{5})^2 - 1^2]} = \sqrt{(2-1)(5-1)} = 2\end{aligned}$$

10. $\boxed{B}$: Fie n numărul natural care împărţit la 2, 4 şi 5 dă câturile nenule q_1, q_2 şi respectiv q_3, iar restul 1. Conform teoremei împărţirii cu rest avem relaţiile $n = 2q_1 + 1$, $n = 4q_1 + 1$ şi $n = 5q_3 + 1$, care sunt echivalente cu $n - 1 = 2q_1$, $n - 1 = 4q_2$ şi $n - 1 = 5q_3$. Deci $n - 1$ este un multiplu comun al lui 2, 4 şi 5. Cel

mai mic număr natural $n-1$ cu această proprietate este c.m.m.m.c$(2,4,5) = 20$. Prin urmare, $n-1=20$, de unde $n=21$.

11. $\boxed{A}$: $P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA$. Cum $BC + CD = 3$ şi $AB = DA$, avem $P_{ABCD} = AB+3+AB$ sau $P_{ABCD} = 2AB+3$, de unde $AB = \frac{P_{ABCD}-3}{2} = \frac{11-3}{2} = \frac{8}{2} = 4\ cm$.

12. $\boxed{B}$: $\sin 30° \cdot \cos 60° + \sin 60° \cdot \cos 30° = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{1+3}{4} = 1$

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a.

Nota la teză	4	5	6	7	8	9	10
Număr de elevi	3	4	5	7	6	3	2

b. Numărul total de elevi este $3+4+5+7+6+3+2 = 30$. Media notelor este

$$\frac{3\cdot4+4\cdot5+5\cdot6+7\cdot7+6\cdot8+3\cdot9+2\cdot10}{30} = \frac{206}{30} = 6,8(6)$$

Cu o aproximaţie de 1 sutime prin lipsa, media este $\boxed{6,86}$.

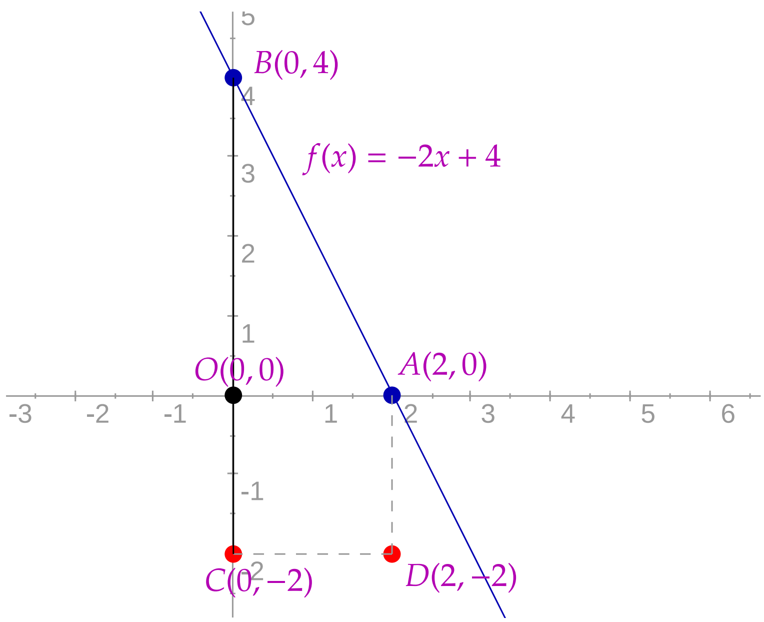

FIGURA 1. Exerciţiul 13.

14. a.

b. Faptul că graficul funcţiei trece prin punctele $A(2;0)$ şi $B(0;4)$, revine la

$$\begin{cases} f(2) = 0 & \Leftrightarrow & a\cdot 2 + b = 0 \\ f(0) = 4 & \Leftrightarrow & a \cdot 0 + b = 4 \end{cases}$$

Din a doua relaţie, avem $b = 4$. Substituind în prima relaţie obţinem $2a + 4 = 0$, sau $2a = -4$, de unde $a = -2$. Astfel funcţia este $f(x) = \boxed{-2x + 4}$.

c. Proiecţia lui $D(2, -2)$ pe axa Oy este punctul $C(0, -2)$, iar patrulaterul $ABCD$ este un trapez dreptunghic cu bazele paralele AD şi BC, iar $CD \perp BC$. Lungimile bazelor sunt $BC = 2 + 4 = 6$ şi $AD = 2$, iar lungimea înălţimii $CD = 2$. Aria trapezului este $\frac{(AD + BC) \cdot CD}{2} = \frac{(2 + 6) \cdot 2}{2} = \boxed{8}$.

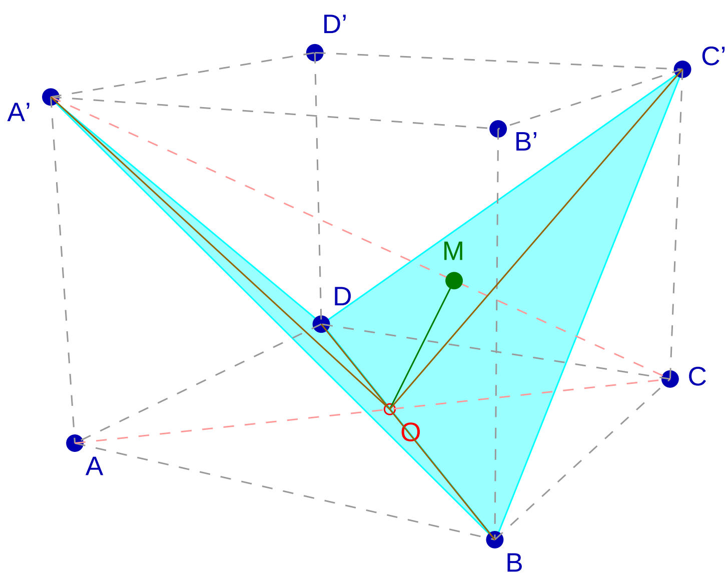

Figura 2. Exerciţiul 15.

15. a.

b. Baza paralelipipedului este pătratul $ABCD$, cu latura de lungime $AB = 8$. Atunci diagonala bazei are lungimea $AC = 8\sqrt{2}$. Conform teoremei lui Pitagora aplicată în triunghiul dreptunghic $A'AC$ ($AA' \perp (ABCD) \Rightarrow AA' \perp AC$), avem $A'C = \sqrt{AC^2 + A'A^2} = \sqrt{(8\sqrt{2})^2 + 6^2} = \sqrt{164} = \boxed{2\sqrt{41}}$.

c. Fie M proiecţia lui O pe $A'C$. Cum $\widehat{A'AC} = \widehat{OMC}$ (unghiuri drepte) şi $\widehat{A'CA} = \widehat{OMC}$, rezultă că triunghiurile $A'AC$ şi OMC sunt asemenea. Atunci $\frac{OM}{AA'} = \frac{OC}{A'C}$. De aici, $OM = \frac{AA' \cdot OC}{A'C} = \frac{6 \cdot 4\sqrt{2}}{2\sqrt{41}} = \boxed{\frac{12\sqrt{82}}{41}}$.

d. Deoarece $A'A \perp (ABCD)$ şi $AO \perp BD$, conform teoremei celor trei perpendiculare, $A'O \perp BD$. Similar se demonstrează că $C'O \perp BD$. Cum intersecţia planelor $(A'BD)$ şi $(C'BD)$ este BD, iar $A'O \subset (A'BD)$ şi $C'O \subset (C'BD)$, rezultă că unghiul dintre planele $(A'BD)$ şi $(C'BD)$ este $\widehat{A'OC'}$.

Cu teorema lui Pitagora aplicată triunghiului dreptunghic $A'AO$, avem $A'O = \sqrt{A'A^2 + AO^2} = \sqrt{6^2 + (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$. La fel se calculează $C'O = 2\sqrt{17}$.
Fie O' mijlocul lui $A'C'$. Atunci OO' este înălţime a paralelipipedului, deci are lungimea 6 cm. Aria triunghiului $A'OC'$ este $\frac{A'C' \cdot OO'}{2} = \frac{8\sqrt{2} \cdot 6}{2} = 24\sqrt{2}$. Pe de altă parte aceaşi arie poate fi exprimată sub forma $\frac{A'O \cdot C'O \cdot \sin \widehat{A'OC'}}{2}$.

Astfel obţinem $\sin \widehat{A'OC'} = \frac{2 \cdot 24\sqrt{2}}{A'O \cdot C'O} = \frac{48\sqrt{2}}{2\sqrt{17} \cdot 2\sqrt{17}} = \boxed{\frac{12\sqrt{2}}{17}}$.

CAPITOLUL 2

Varianta 92

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $9 + 3 : 3 = 9 + 1 = \boxed{10}$.
2. Ecuaţia $x - 2 = 9$ este echivalent cu $x = 2 + 9$, sau $x = \boxed{11}$.
3. Cum $28 = 5 \cdot 5 + 3$, restul împărţirii lui 28 la 5 este egal cu $\boxed{3}$.
4. Cum $12 = 3 \cdot 2^2$ şi $18 = 2 \cdot 3^2$, avem c.m.m.d.c$(12, 18) = 2 \cdot 3 = \boxed{6}$.
5. Notăm coarda de lungime $8\ cm$ cu AB, O centrul cercului şi cu M proiecţia lui O pe coarda AB. Avem de calculat lungimea lui OM. Cum $AO = OB$, triunghiul AOB este isocel şi înălţimea OM este şi mediană, deci $AM = \frac{AB}{2} = \frac{8}{2} = 4\ cm$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic AMO avem $MO = \sqrt{AO^2 - AM^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = \boxed{3}$ cm.
6. Cum hexagonul regulat se împarte în 6 triunghiuri echilaterale de latura egală cu lungimea laturii hexagonului, aria hexagonului regulat este egală cu de 6 ori aria unui triunghi echilateral de latură $4\ cm$. Deci, aria hexagonului este $6 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot 4\sqrt{3} = \boxed{24\sqrt{3}}\ \mathrm{cm}^2$.
7. $V_{\text{sferă}} = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi 9^3}{3} = 4\pi \cdot 81 \cdot 3 = \boxed{972}\pi\ \mathrm{cm}^3$.
8. Feţele laterale ale prismei sunt 4 dreptunghiuri, fiecare cu aria de $5 \cdot 2 = 10\ \mathrm{cm}^2$. Atunci aria laterală a prismei este $A_l = 4 \cdot 10 = \boxed{40}\ \mathrm{cm}^2$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{C}$: Dacă $M = \{3, -2, 1, 0, 2\}$ şi $P = \{x \in \mathbb{Z} | -2 < x \leq 2\} = \{-1, 0, 1, 2\}$, atunci $M \cap P = \{0, 1, 2\}$.
10. $\boxed{C}$: $f(0) = 3(0 - 2) + 5 = -6 + 5 = -1$.
11. $\boxed{B}$: Fie $ABCD$ trapezul isocel cu baza mare AB şi baza mică CD. Fie E proiecţia lui D pe AB. Atunci $AE = \frac{AB - DC}{2} = \frac{16 - 10}{2} = \frac{6}{2} = 3\ cm$. În triunghiul dreptunghic AED avem $\cos\widehat{DAE} = \frac{AE}{AD}$, de unde $AD = \frac{AE}{\cos 60^\circ} =$

$\frac{3}{\frac{1}{2}} = 6\ cm$. Trapezul fiind isoscel avem şi $BC = 6$. Atunci $P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 16 + 10 + 2 \cdot 6 = 26 + 12 = 38\ cm$.

12. $\boxed{A}$: Ipotenuza triunghiului dreptunghic este diametrul cercului circumscris triunghiului dreptunghic, deci raza cercului circumscris triunghiul dreptunghic dat este egală cu $\frac{24}{2} = 12\ cm$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Temperaturile din cele patru zile au fost

Ziua	I	II	III	IV
Temperatura	$-5°$C	$-3°$C	$-1°$C	$1°$C

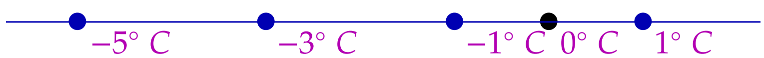

FIGURA 1. Exerciţiul 13.

b. Media aritmetică a temperaturilor este

$$\frac{(-5) + (-3) + (-1) + 1}{4} = \frac{-8}{4} = \boxed{-2°}$$

14. a. Discriminantul ecuaţiei de gradul doi $x^2 + 2x - 35 = 0$ este $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 35 = 4 + 140 = 144$, iar rădăcinile

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{144}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 + 12}{2} = \frac{10}{2} = \boxed{5}$$
$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{144}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 - 12}{2} = \frac{-14}{2} = \boxed{-7}$$

b. Folosind punctul (a), expresia $E(x)$ poate fi descompusă în factori sub forma $E(x) = (x-5)(x-(-7)) = (x-5)(x+7)$. Atunci pentru $n \in \mathbb{Z}$, $E(n) = (n-5)(n+7)$ este număr natural prim doar când unul din factori este ± 1 iar celălalt este număr prim. Distingem cazurile

- $n - 5 = -1 \Rightarrow n = 4$, $E(4) = (-1) \cdot 11 = -11 \notin \mathbb{N}$
- $n - 5 = 1 \Rightarrow n = 6$, $E(6) = 1 \cdot 13 = 13$ număr prim
- $n + 7 = -1 \Rightarrow n = -8$, $E(-8) = (-13) \cdot (-1) = 13$, număr prim
- $n + 7 = 1 \Rightarrow n = -6$, $E(-6) = (-11) \cdot 1 = -11 \notin \mathbb{N}$

In concluzie, $n \in \boxed{\{-8, 6\}}$.

c. Pentru $x \in \mathbb{Z}$, dacă $E(x) = (x-5)(x+7)$ este divizibil cu 3, unul din factori se divide cu 3. Dar, cum $(x+7) - (x-5) = 12$, dacă unul dintre numerele întregi $x+7$ şi $x-5$ este divizibil cu 3, atunci şi celălalt este divizibil cu 3.

Cum ambii factori din descompunerea lui $E(x)$ sunt divizibili cu 3, rezultă că $E(x)$ este divizibil cu $3 \cdot 3 = 9$.

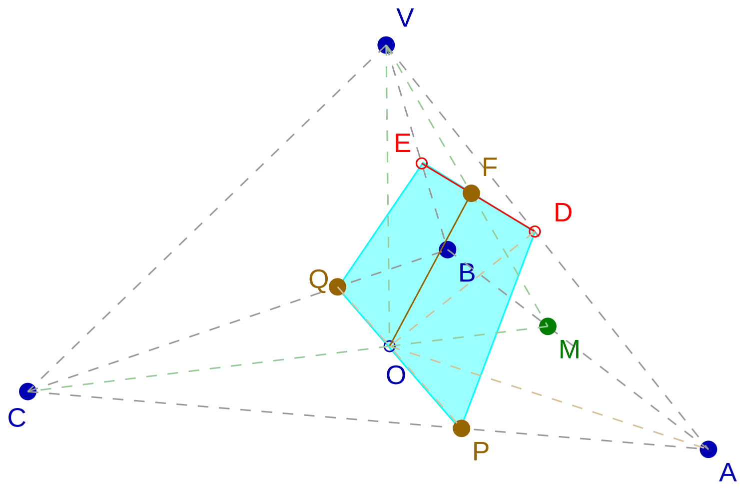

FIGURA 2. Exerciţiul 15.

15. a.

b. Fie M mijlocul lui AB. Cum OM este apotema triunghiului echilateral ABC, avem $OM = \dfrac{AB\sqrt{3}}{6} = \dfrac{12\sqrt{3}}{6} = 2\sqrt{3}$. Aplicând teorema lui Pitagora triunghiului dreptunghic VOM obţinem lungimea apotemei piramidei $VM = \sqrt{VO^2 + OM^2} = \sqrt{6^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{36 + 12} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$. Aria laterală (semiperimetrul bazei înmulţit cu apotema) este atunci

$$\frac{3 \cdot 12}{2} \cdot 4\sqrt{3} = \boxed{72\sqrt{3}}$$

c. Cum DE este linie mijlocie îtriunghiul VAB, avem $DE \parallel AB$. Dar o dreaptă paralelă cu o dreaptă dintr-un plan este paralelă cu acel plan. Iar AB se află în planul (ABC). In concluzie DE este paralelă cu planul (ABC).

d. Determinăm mai întâi muchia laterală a piramidei. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic VMA, avem $VA = \sqrt{VM^2 + AM^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 6^2} = \sqrt{48 + 36} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$. In triunghiul dreptunghic VOA, OD este mediana corespunzătoare ipotenuzei, deci $OD = \dfrac{VA}{2} = \sqrt{21}$. La fel se arată că $OE = \sqrt{21}$.

Fie P, respectiv Q intersecţia planului DOE cu AC, respectiv BC. Cum dreapta DE este paralelă cu planul (ABC), rezultă că $DE \parallel PQ$. Fie F mijlocul segmentului DE. Atunci OF fiind mediană într-un triunghi isoscel, este şi înălţime. Rezultă $OF \perp DE$ şi de aici $OF \perp PQ$. Pe de altă parte avem şi $AB \parallel PQ$ şi cum $OM \perp AB$, rezultă $OM \perp PQ$. Atunci unghiul dintre planele (DOE) şi (ABC) este $\widehat{FOM}$.
Cum DE este linie mijlocie în triunghiul VAB, ea împarte înălţimea VM în două părţi egale. Deci $FM = \dfrac{VM}{2} = 2\sqrt{3}$. Din acelaşi motiv, avem $DE = \dfrac{AB}{2} = 6$. Atunci $DF = \dfrac{DE}{2} = 3$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic DFO, obţinem $FO = \sqrt{DO^2 - DF^2} = \sqrt{(\sqrt{21})^2 - 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.
Am văzut deja la punctul (b) că $OM = 2\sqrt{3}$, deci $FO = OM = FM$. Triunghiul FMO este atunci echilateral, deci $\widehat{FOM} = \boxed{60^\circ}$.

CAPITOLUL 3

Varianta 93

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $4 \cdot 5 - 4 = 20 - 4 = \boxed{16}$
2. Cel mai mare element al mulţimii $A = \{102, 120, 99, 101, 103\}$ este egal cu $\boxed{120}$.
3. Din $\frac{4x}{5} = \frac{5}{25}$ avem $x = \frac{5 \cdot 5}{25 \cdot 4} = \boxed{\frac{1}{4}}$.
4. Dacă numărul $\overline{34x}$ este divizibil cu 10 atunci $x = \boxed{0}$.
5. Dacă perimetrul unui pătrat este egal cu $12\ cm$, atunci latura pătratului este egală cu $\frac{12}{4} = \boxed{3}\ cm$.
6. Aria triunghiului echilateral cu lungimea laturii egală cu $10\ cm$ este $\frac{10 \cdot 10 \cdot \sin 60°}{2} = \frac{100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 50 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{25\sqrt{3}}\ cm^2$.
7. $A_l = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 3 \cdot 4 = \boxed{12\pi}\ cm^2$.
8. Volumul cubului cu muchia de $4\ cm$ este egal cu $4^3 = \boxed{64}\ cm^3$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{C}$: $E(0) = (2 \cdot 0 - 1)^4 - (2 \cdot 0 + 1)^4 = (-1)^4 - 1^4 = 1 - 1 = 0$.
10. $\boxed{C}$: $a = \sqrt{3^7 + 3^6} = \sqrt{3^6(3+1)} = \sqrt{3^6 \cdot 4} = 3^3 \cdot 2 = 27 \cdot 2 = 54$
11. $\boxed{A}$: Fie $ABCD$ rombul cu diagonale $AC = 24\ cm$ şi $BD = 10\ cm$, iar $AC \cap BD = \{O\}$. Cum O este mijlocul lui AC şi BD, $AO = \frac{AC}{2} = \frac{24}{2} = 12\ cm$, iar $BO = \frac{BD}{2} = \frac{10}{2} = 5\ cm$. În triunghiul dreptunghic AOB aplicând teorema lui Pitagora avem $AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13\ cm$. Prin urmare, perimetrul rombului este egal cu $4 \cdot 13 = 52\ cm$.
12. $\boxed{D}$: Calculăm mai întâi măsura unghiului $\hat{A}$. Cum triunghiul ABC este isocel cu $m(\hat{B}) = m(\hat{C}) = 35°$, avem $m(\hat{A}) = 180° - (m(\hat{B}) + m(\hat{C})) = 180° - (35° + 35°) =$

$180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$. Fiind înălţime în triunghiul isocel ABC cu $AB = AC$, rezultă că AD este şi bisectoare, deci $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{CDA}) = \dfrac{\widehat{BAC}}{2} = \dfrac{110^\circ}{2} = 55^\circ$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Fie P preţul iniţial al telefonului. După o săptămână noul preţ al telefonului este 90% din preţul iniţial P, adică $\frac{9}{10}P$. După încă o săptămână noul preţ este 90% din preţul de $\frac{9}{10}P$, adică $\frac{9}{10}\cdot\frac{9}{10}P = \frac{81}{100}P$. Obţinem relaţia $\frac{81}{100}P = 810$, de unde $P = \dfrac{810\cdot 100}{81} = \boxed{1000}$ lei.

b. In cele două săptămâni telefonul a pierdut $1000 - 810 = 190$ lei din preţ, deci s-a ieftinit cu $\dfrac{190}{1000} = \dfrac{19}{100} = \boxed{19\%}$.

14. a. Pentru $f(x) = 3x + 6$, avem $f(0) = 6$ şi $f(-2) = 3\cdot(-2) + 6 = -6 + 6 = 0$. Ecuaţia $2f(x) - f(0) = f(-2)$ se rescrie $2(3x + 6) - 6 = 0$ sau $6x + 6 = 0$, de unde $x = \dfrac{-6}{6} = \boxed{-1}$.

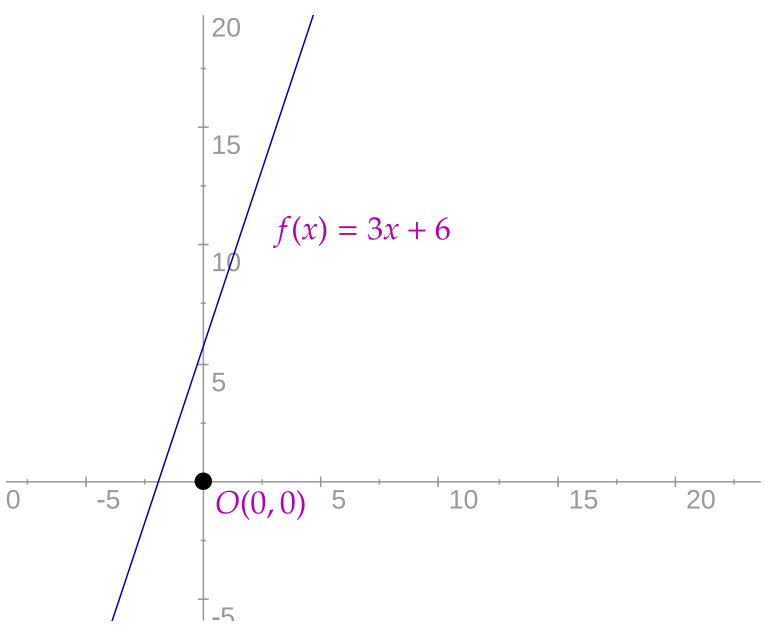

FIGURA 1. Exerciţiul 14.

b.

c.

$$\begin{aligned} S &= f(0) + f(2) + f(4) + \ldots + f(32) \\ &= 6 + (3\cdot 2 + 6) + (3\cdot 4 + 6) + \ldots + (3\cdot 32 + 6) \\ &= 6 + 12 + 18 + 24 + \ldots + 102 \\ &= 6(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 17) = 6\cdot\frac{17\cdot 18}{2} \\ &= 3\cdot 17\cdot 18 = 51\cdot 18 = \boxed{918} \end{aligned}$$

▼[detalii]

Am folosit faptul că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem

$$1 + 2 + .. + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

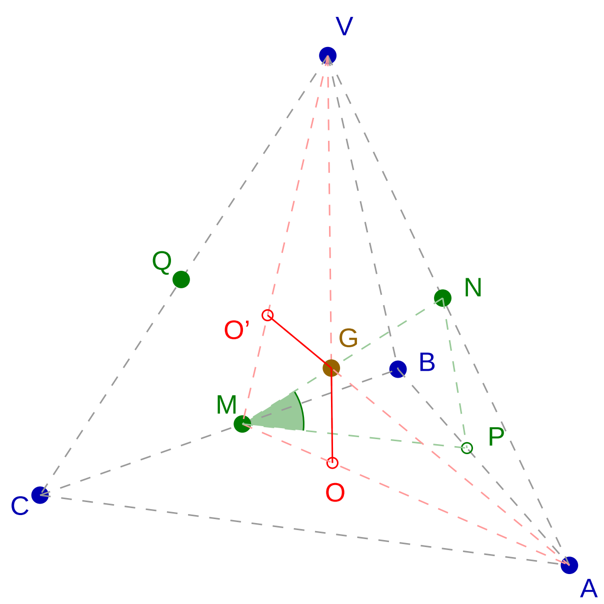

FIGURA 2. Exerciţiul 15.

15. a.

b. In triunghiul echilateral VBC, înălţimea VM are lungimea $\frac{BC\cdot\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ cm. Baza ABC este tot un triunghi echilateral, cu aceleaşi dimensiuni. Apotema lui este $OM = \frac{AB\cdot\sqrt{3}}{6} = 2\sqrt{3}$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic VOM, aflăm lungimea înălţimii piramidei $VO = \sqrt{VM^2 - OM^2} = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{108 - 12} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$.

Cum aria bazei este $\frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}$, volumul piramidei este

$$\frac{\text{Aria}_{ABC}\cdot VO}{3} = \frac{36\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{6}}{3} = \boxed{144\sqrt{2}}.$$

c. Fie P mijlocul segmentului AB. Cum $PM \parallel AC$, unghiul dintre dreptele MN şi AC este unghiul dintre dreptele MN şi PM, adică $\widehat{PMN}$.
Prima rezolvare. In triunghiul ABC, PM este linie mijlocie, deci $PM = \frac{AB}{2} = 6$. La fel, în triunghiul VAB, NP este linie mijlocie, deci $NP = \frac{VB}{2} = 6$. Triunghiul MVA este isoscel cu $MA = MV$ (înălţimi în triunghiuri echilaterale congruente). Deoarece N este mijlocul lui VA, MN este şi înălţime. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic MNA, avem $MN = \sqrt{MA^2 - AN^2} = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 - 6^2} = 6\sqrt{2}$. Observând că $MN^2 = MP^2 + NP^2$ (într-adevăr $(6\sqrt{2})^2 = 6^2 + 6^2$), rezultă că triunghiul MNP este dreptunghic cu unghiul drept $\widehat{MPN}$. Dar acest triunghi este şi isoscel cu $MP = NP = 6$. In concluzie $\widehat{PMN} = \boxed{45°}$.
A doua rezolvare. Ne propunem aici doar să demonstrăm altfel că triunghiul MPN este dreptunghic. Restul rezolvării este la fel ca la prima rezolvare şi nu a mai fost reprodusă din nou.
In triunghiul ABC, punctul O este centrul de greutate dar şi ortocentru. Rezultă că $AC \perp BO$. De asemenea, deoarece VO este înălţimea piramidei, avem $VO \perp AC$. Atunci AC este perpendiculară pe două drepte din planul (VOB), deci $AC \perp (VOB)$. In particular $AC \perp VB$. Cum $AC \parallel PM$ şi $NP \parallel VB$, rezultă că $PM \perp NP$, deci triunghiul MPN este dreptunghic.

d. Fie O' piciorul perpendicularei din G pe VM. In triunghiul isoscel VMA, înălţimea MN este şi bisectoare. Atunci distanţele de la punctul $G \in MN$ la dreptele VM şi AM, (anume GO şi GO'), sunt egale. Dar $GO \perp (ABC)$, deci GO este distanţa de la G la planul (ABC). Pe de altă parte, din $BC \perp VO$ şi $BC \perp VM$, rezultă $BC \perp (VAM)$ şi în particular $BC \perp GO'$. Dar aveam şi $GO' \perp VM$, deci $GO' \perp (VBC)$. Astfel am arătat că distanţa de la G la planul (VBC) este egală cu distanţa de la G la la planul (ABC).
Fie acum Q mijlocul lui VC. şi fie G' intersecţia lui PQ cu VO. Similar cu cele de mai sus (PQ va juca rolul lui MN) se arată că distanţa de la punctul G' la (VAB) este egală cu distanţa de la G' la planul (ABC).
Să observăm că punctul G este intersecţia a două din înălţimile triunghiului VAM, anume VO şi MN. Deci P este ortocentrul triunghiului VAM. La fel arătăm că G' este ortocentrul triunghiului VCP. Atât G cât şi G' se găsesc pe VO. In plus triunghiurile VAM şi VCP sunt congruente. Atunci ortocentrul lor va determina pe VO acelaşi raport. In concluzie, $G = G'$. Am demonstrat astfel că dinstaţele de la punctul G la planele (VBC), respectiv (VAB) este aceaşi cu distanţa la planul

(ABC). Considerând şi mijlocul lui VB şi urmând un raţionament analog se demonstrează şi ca distanţa de la G la (VAC) este aceaşi cu distanţa la (ABC), ceea ce încheie demonstraţia.

CAPITOLUL 4

Varianta 94

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $4 + 2 \cdot 5 = 4 + 10 = \boxed{14}$
2. Dacă mulţimile $A = \{1, 7, 2, n\}$ şi $B = \{1, 2, 5, 7\}$ sunt egale, atunci $n = \boxed{5}$.
3. $E(5) = (5 - 2)(5 + 2) = 3 \cdot 7 = \boxed{21}$
4. Fracţia care corespunde suprafeţei haşurate este egală cu $\frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$ din întreg.
5. Suma celor 6 unghiuri congruente este egală cu $360°$, deci măsura unui unghi este egală cu $\frac{360°}{6} = \boxed{60°}$.
6. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic, lungimea celeilalte catete este $\sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = \boxed{5}\ cm$.
7. $V_{\text{piramidă}} = \frac{A_{bazei} \cdot h}{3} = \frac{10^2 \cdot 18}{3} = 100 \cdot 6 = \boxed{600}\ cm^3$.
8. Cum $A_l = \pi \cdot g(R + r)$, unde R este raza bazei mari, r raza bazei mici, iar g generatoarea trunchiului de con, deducem

$$g = \frac{A_l}{(R + r)\pi} = \frac{80\pi}{(7 + 3)\pi} = \frac{80}{10} = \boxed{8}\ cm$$

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{D}$: Numărul de elemente al mulţimii $\{10, 12, 14, ..., 100\}$ este egal cu $\frac{100 - 10}{2} + 1 = 45 + 1 = \boxed{46}$. Putem să mai gândim şi astfel: din cele 50 de numere pare dintre 1 şi 100, au fost scoase primele 4, deci rămân $50 - 4 = 46$.
10. $\boxed{B}$: Punctul $P(4, 0)$ reprezintă proiecţia lui N pe axa Ox. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic MPN avem $MN = \sqrt{MP^2 + NP^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5\ cm$.
11. $\boxed{B}$: Fie $ABCD$ paralelogramul de perimetru $28\ cm$ şi BD diagonala a cărui lungime trebuie aflată. $P_{ABCD} = AB+BC+CD+DA = 2AB+2DA = 2(AB+DA)$, de unde $AB + DA = \frac{P_{ABCD}}{2} = \frac{28}{2} = 14\ cm$. Cum $P_{ABD} = AB + BD + DA$, iar din

ipoteză $P_{ABD} = 26\ cm$ deducem că $26 = AB+BD+DA$. Înlocuind $AB+DA = 14$ obţinem $26 = 14 + BD$, de unde $BD = 26 - 14 = 12\ cm$.

12. $\boxed{D}$: $\operatorname{tg} 30^\circ - \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. In tabelul următor prezentăm corespondenţa dintre ultima cifră a unui număr p şi ultima cifră a lui p^2.

Ultima cifră a lui p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Ultima cifră a lui p^2	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0

Ultima cifră a lui $5n$ este 0 sau 5, deci ultima cifră a lui $5n + 2$ este 2 sau 7. Dar din tabelul de mai sus observăm că ultima cifră a unui pătrat perfect nu este niciodată 2 sau 7. In concluzie $\sqrt{5n+2}$ nu poate fi număr natural, prin urmare este **automat iraţional**.

b. Procedăm prin reducere la absurd. Presupunem că fracţia dată se simplifică prin $p \in \mathbb{N}^*$, $p > 1$. Atunci fracţia se simplifică şi după ce scoatem întregii din fracţie. Cum $\frac{5n+7}{3n+4} = 1 + \frac{2n+3}{3n+4}$, rezultă că fracţia $\frac{2n+3}{3n+4}$ se simplifică prin p. Atunci şi fracţia $\frac{3n+4}{2n+3}$ se simplifică prin p. Scoatem iar întregii din fracţie, $\frac{3n+4}{2n+3} = 1 + \frac{n+1}{2n+3}$ şi rezultă că fracţia $\frac{n+1}{2n+3}$ se simplifică prin p. De aici, deducem că fracţia $\frac{2n+3}{n+1}$ se simplifică prin p. Scoatem încă o dată întregii din fracţie $\frac{2n+3}{n+1} = 2 + \frac{1}{n+1}$ şi obţine că fracţia $\frac{1}{n+1}$ se simplifică prin p. Dar atunci p este un divizor > 1 al lui 1. Contradicţia obţinută demonstrează că presupunerea făcută este falsă şi astfel am demonstrat că fracţia din enunţ este ireductibilă.

14. a.

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} + \frac{1}{b} &= \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{7} + \sqrt{2}}{(\sqrt{7} - \sqrt{2})(\sqrt{7} + \sqrt{2})} + \frac{\sqrt{7} - \sqrt{2}}{(\sqrt{7} - \sqrt{2})(\sqrt{7} + \sqrt{2})} \\ &= \frac{\sqrt{7} + \sqrt{2} + \sqrt{7} - \sqrt{2}}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{2\sqrt{7}}{7-2} = \frac{2\sqrt{7}}{5}\end{aligned}$$

Pentru a arăta că $\frac{2\sqrt{7}}{5} \in \left(\frac{4}{5}, \frac{6}{5}\right)$ este suficient să arătăm că $4 < 2\sqrt{7} < 6 \Leftrightarrow 2 < \sqrt{7} < 3$. Or aceasta este evident dacă scriem inegalitatea sub forma $2 = \sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9} = 3$.

b. Avem $a - b = \sqrt{7} - \sqrt{2} - (\sqrt{7} + \sqrt{2}) = \sqrt{7} - \sqrt{2} - \sqrt{7} - \sqrt{2} = -2\sqrt{2}$. Deci, $(a-b)^2 = (-2\sqrt{2})^2 = 4 \cdot 2 = \boxed{8}$.

c. De la punctul precedent ştim că $a - b = -2\sqrt{2}$. Aunci $a - b + 2\sqrt{2} = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 0$ şi prin urmare, $(a - b + 2\sqrt{2})^{2007} = \boxed{0}$.

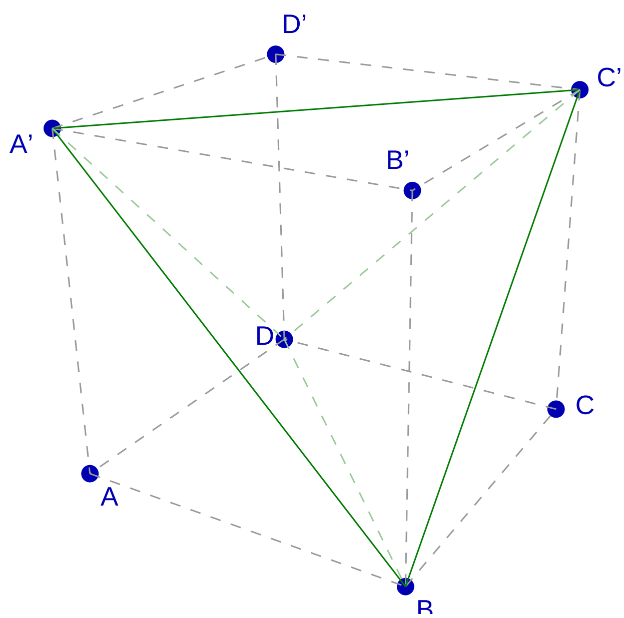

Figura 1. Exerciţiul 15.

15. a.

b. Cum $A'C'$, $A'B$ şi BC' sunt diagonale în pătrate de latura 18, toate au lungimea $18\sqrt{2}$. Triunghiul $A'BC'$ este echilateral şi aria sa este egală cu $\frac{A'B^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(18\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = \boxed{162\sqrt{3}}$.

c. Fie d distanţa de la B' la planul $A'BC'$. Considerăm tetraedrul $BA'C'B'$. Il putem privi ca o piramidă triunghiulară regulată cu baza triunghiul echilateral $A'BC'$. Volumul piramidei este atunci $\frac{\text{Aria}_{A'BC'} \cdot d}{3} = \frac{162\sqrt{3} \cdot d}{3} = 54\sqrt{3} \cdot d$.

Pe de altă parte, putem privi acest tetraedru ca o piramidă triunghiulară cu baza $A'BB'$. Volumul piramidei este atunci $\frac{\text{Aria}_{A'BB'} \cdot B'C'}{3} = \frac{\frac{A'B' \cdot BB'}{2} \cdot B'C'}{3} = \frac{18^3}{6} = 3 \cdot 18^2$.

Egalând cele două forme ale volumului, avem $54\sqrt{3}\cdot d = 3\cdot 18^2$, de unde $d = \frac{3\cdot 18^2}{54\sqrt{3}} = \frac{3\cdot 18^2}{3\cdot 18\sqrt{3}} = \frac{18}{\sqrt{3}} = \boxed{6\sqrt{3}}$

d. Observăm că putem partiţiona cubul în 5 tetraedre, anume $A'ABD$, $C'CBD$, $BA'B'C'$, $DA'C'D'$ şi $BDA'C'$. Primele patru tetraedre de mai sus au acelaşi volum $\frac{18^3}{6}$ (am văzut la punctul (c) cum calculăm volumul lui $BA'C'B'$ de exemplu). Atunci volumul lui $BDA'C'$ este

$$\text{Volum}_{cub} - 4\cdot\text{Volum}_{BA'C'B'} = 18^3 - 4\cdot\frac{18^3}{6} = \frac{18^3}{3} = \boxed{1944}$$

CAPITOLUL 5

Varianta 95

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $24 + 2 \cdot 3 = 24 + 6 = \boxed{30}$
2. Ecuaţia $7 - x = 2$ este echivalentă cu $7 - 2 = x$, de unde $x = \boxed{5}$.
3. $\frac{15}{100} \cdot 300 = \boxed{45}$
4. $(4x + 5x) : x = 9x : x = \boxed{9}$
5. Două unghiuri suplementare au suma măsurilor egală cu $180°$. Dacă măsura unui unghi este $80°$, atunci suplementul său are măsura egală cu $180° - 80° = \boxed{100°}$.
6. Aria dreptunghiului cu laturile de $5\ dm$ şi $10\ dm$ este egală cu $5 \cdot 10 = \boxed{50}\ dm^2$.
7. Dacă muchia unui cub are lungimea de $3\ cm$, atunci suma tuturor muchiilor cubului este egală cu $12 \cdot 3 = \boxed{36}\ cm^2$.
8. $V_{cilindru} = \pi \cdot r^2 \cdot g = \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = \pi \cdot 9 \cdot 4 = \boxed{36}\pi\ cm^3$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{D}$: Cum $x \cdot y = 6$, $y \cdot z = 12$ şi $z \cdot t = 20$, rezultă că $x, y, z \neq 0$. Înmulţind prima relaţie cu ultima şi împărţind la a doua obţinem

$$\frac{(x \cdot y) \cdot (z \cdot t)}{y \cdot z} = \frac{6 \cdot 20}{12} \Leftrightarrow x \cdot t = 10$$

10. $\boxed{C}$: Fie p preţul iniţial al obiectului. După scumpirea cu 10%, preţul devine $p + \frac{10}{100} \cdot p = p + \frac{1}{10} \cdot p = p\left(1 + \frac{1}{10}\right) = \frac{11}{10}p$. Din ipoteză preţul după scumpire este 220 lei, deci avem relaţia $\frac{11}{10}p = 220$, de unde $p = \frac{220 \cdot 10}{11} = 200$.
11. $\boxed{B}$: Cum M este mijlocul lui AB, $MB = \frac{AB}{2} = \frac{12}{2} = 6\ cm$. Punctul P este mijlocul lui MN, deci $MP = \frac{MN}{2}$. Cum $MN = MB + BN = 6 + \frac{BC}{2} = 6 + \frac{4}{2} = 6 + 2 = 8\ cm$, avem $MP = \frac{8}{2} = 4\ cm$. Înlocuind acum în $PB = MB - MP$, obţinem $PB = 6 - 4 = 2\ cm$.

12. $\boxed{D}$: $P_{MNPB} = MN+NP+PB+BM = 2NP+2BP$, de unde $NP+BP = \frac{P_{MNPB}}{2} = \frac{20}{2} = \boxed{10}\ cm$. Din faptul că $NP \parallel AB$ conform teoremei fundamentale a asemănării rezultă că triunghiurile ABC şi NPC sunt asemenea, deci NPC este triunghi echilateral. Prin urmare, $NP = PC$ şi deci $BC = BP + PC = BP + NP = 10\ cm$. Avem deci $P_{ABC} = 3 \cdot BC = 3 \cdot 10 = \boxed{30}\ cm$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Avem $x + y + z = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = (100a + 10b + c) + (100b + 10c + a) + (100c + 10a + b) = 111(a + b + c)$. Cum $111 = 3 \cdot 37$, rezultă că $x + y + z$ se divide cu 37.
    b. Cea mai mică valoare a lui $x+y+z$ este atinsă când $a+b+c$ este minim. Iar aceasta se intâmplă pentru $a = b = c = 1$, caz în care $x+y+z = \boxed{333}$.
14. a. Avem $f(\sqrt{2} - 1) = -3(\sqrt{2} - 1) + 2 = -3\sqrt{2} + 5$ şi $f(\sqrt{2}) = -3\sqrt{2} + 2$. Evident $f(\sqrt{2} - 1) > f(\sqrt{2})$.

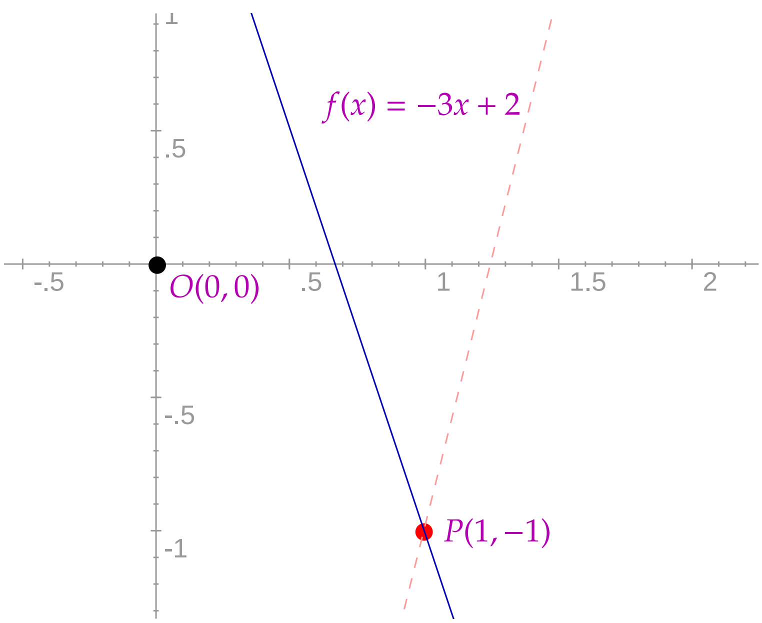

FIGURA 1. Exerciţiul 14. Punctele de forma $\left(\frac{a+3}{2}, 2a+1\right)$ descriu o dreaptă ce intersectează graficul funcţiei f în punctul P din enunţ.

b.
c. Punctul P se află pe reprezentarea grafică a lui f dacă şi numai dacă $f\left(\frac{a+3}{2}\right) = 2a+1 \Leftrightarrow -3\frac{a+3}{2} + 2 = 2a+1 \Leftrightarrow \frac{-3a-9}{2} = 2a-1 \Leftrightarrow -3a-9 = 4a-2 \Leftrightarrow -7a = 7 \Leftrightarrow a = \frac{7}{-7} = \boxed{-1}$

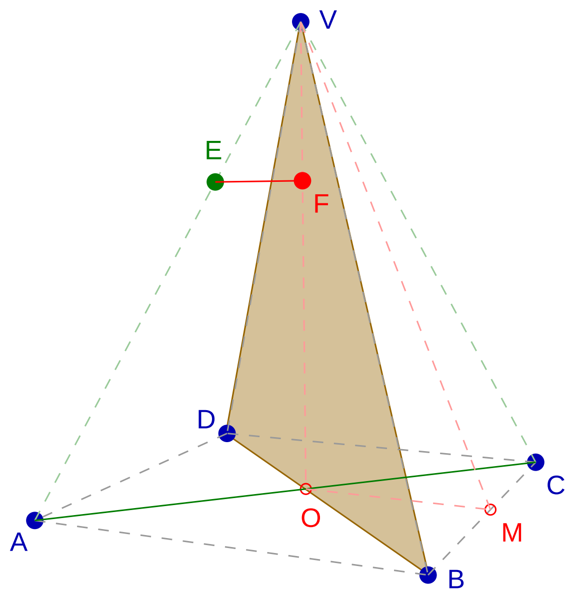

FIGURA 2. Exerciţiul 15.

15. a.

b. Determinăm lungimea înălţimii piramidei. Fie O piciorul înălţimii. Cum aria bazei este $(6\sqrt{2})^2 = 72$, scriind volumul piramidei obţinem relaţia $\frac{72 \cdot VO}{3} = 144\sqrt{3}$, de unde $VO = 6\sqrt{3}$. Diagonala pătratului de latură $6\sqrt{2}$ are lungimea $6\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 12$, deci $OA = 6$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic VOA avem $VA = \sqrt{AO^2 + VO^2} = \sqrt{6^2 + (6\sqrt{3})^2} = \sqrt{36 + 108} = \sqrt{144} = 12$. Cum $VC = VA = 12$ şi am văzut mai sus că $AC = 12$, triunghiul VAC este echilateral.

c. Fie M mijlocul lui BC. Triunghiul VBC fiind isoscel, $VM \perp BC$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic VOM, avem

$$VM = \sqrt{VO^2 + OM^2} = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{108 + 18} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}.$$

Atunci aria laterală este $4 \cdot \frac{VM \cdot BC}{2} = 2 \cdot 3\sqrt{14} \cdot 6\sqrt{2} = \boxed{72\sqrt{7}}$.

d. Fie F piciorul perpendicularei din E pe VO. Deoarece $BD \perp AC$ şi $BD \perp VO$, rezultă $BD \perp (VAO)$. In particular, $BD \perp EF$. Cum avem şi $EF \perp VO$, rezultă $EF \perp (VBD)$. Deci distanţa de la E la planul (VBD) este EF. Deoarece $EF \perp VO$ şi $AO \perp VO$. Deoarece punctele E, F, A şi O sunt coplanare rezultă că $EF \parallel AO$. Conform teoremei fundamentale a asemănării, triunghiurile VEF şi VAO sunt asemenea. Atunci

$$\frac{EF}{AO} = \frac{VE}{VA} = \frac{VE}{VE + AE} = \frac{VE}{VE + 2VE} = \frac{1}{3}$$

şi de aici $EF = \frac{AO}{3} = \frac{6}{3} = \boxed{2}$.

PRO DIDACTICA VĂ UREAZĂ SUCCES LA EXAMEN.
DE LA TOAMNĂ VĂ AŞTEPTĂM CU ÎNTREBĂRI DIN MATERIA DE LICEU.