BAC 2007

Pro–Didactica

Testare Naţională

Rezolvările variantelor 61–65

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

Cuprins

CAPITOLUL 1

Varianta 61

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $5 + 5 \cdot 3 = 5 + 15 = \boxed{20}$.
2. Un sfert din numărul 24 este $\frac{1}{4} \cdot 24 = \boxed{6}$.
3. Media aritmetică a numerelor 100 şi 150 este $\frac{100+150}{2} = \frac{250}{2} = \boxed{125}$.
4. În urnă sunt în total 15 bile, dintre care 10 bile roşii. Probabilitatea ca, atunci când extragem o bilă, aceasta să fie roşie este $\frac{10}{15} = \boxed{\frac{2}{3}}$.
5. Cel mai mare număr natural de trei cifre $\boxed{999}$ este şi impar.
6. Aria triunghiului echilateral cu lungimea laturii 8 cm este
$$\frac{8 \cdot 8 \cdot \sin 60^\circ}{2} = 4 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{16\sqrt{3}}\,\mathrm{cm}^2$$
7. $V_{cub} = 5^3 = \boxed{125}\,\mathrm{cm}^3$.
8. $A_l = 2\pi r g = 2\pi \cdot 4 \cdot 6 = \boxed{48}\,\pi\,\mathrm{cm}^2$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{C}$: Inecuaţia $4x - 8 < 2x$ se rescrie $4x - 2x < 8$, sau $2x < 8$, de unde $x < \frac{8}{2}$, sau $x < 4$. Deci mulţimea soluţiilor naturale ale inecuaţiei este $x \in \mathbb{N} \cap (-\infty, 4) = \{0, 1, 2, 3\}$.
10. $\boxed{A}$: $E(-2) = [(-2-2)^2 - ((-2)^2 - 4)] : (-2-2) = \frac{(-4)^2 - 0}{-4} = \frac{16}{-4} = -4$.
11. $\boxed{B}$: Cum $\widehat{AOB}$ şi $\widehat{BOC}$ sunt suplementare, avem $\widehat{BOC} = 180^\circ - \widehat{AOB} = 180^\circ - 46^\circ = 134^\circ$. Ştim că $[OM$ este bisectoarea lui $\widehat{BOC}$, deci $\widehat{BOM} = \frac{\widehat{BOC}}{2} = \frac{134^\circ}{2} = 67^\circ$. Prin urmare avem: $\widehat{AOM} = \widehat{AOB} + \widehat{BOM} = 46^\circ + 67^\circ = 113^\circ$.
12. $\boxed{D}$: Lungimea unui cerc este dată de formula $2\pi r$. Avem deci $2\pi r = 8\pi$, de unde $r = \frac{8}{2} = 4$. Deci $A_{cerc} = \pi r^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi\ cm^2$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Cum laptele conţine 20% smântână, rezultă că din cei 1500 litri de lapte se vor fabrica $\frac{20}{100} \cdot 1500 = 300\ l$ smânână. Ştiind că smântâna se pune în pungi de $500\,\mathrm{ml} = 0,5$ l, înseamnă că pentru 300 l de smântână avem nevoie de $\frac{300}{0,5} = \boxed{600}$ pungi.

b. Cum pentru $300\ l$ de smântână evem nevoie de 400 de pungi, înseamnă că o pungă conţine $\frac{300}{400} = \frac{3}{4} = 0,75\,l = \boxed{750}\,ml$ smântână.

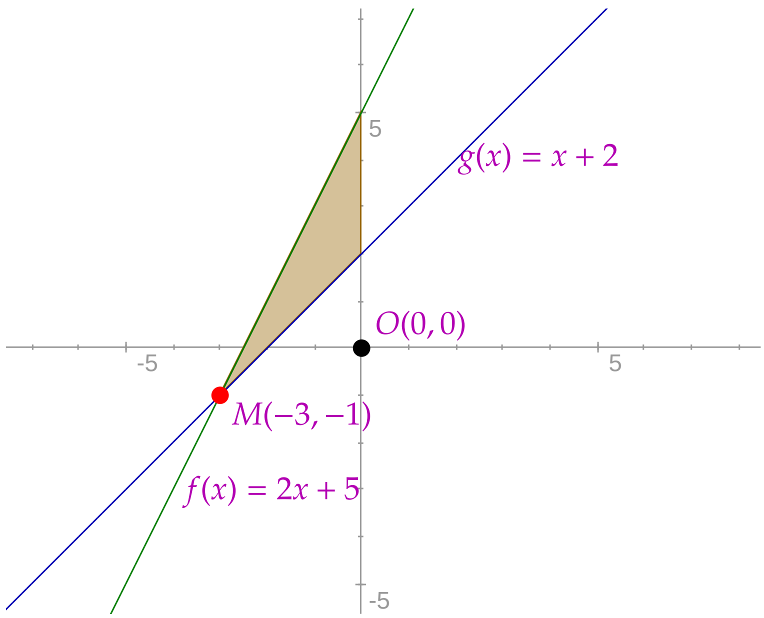

FIGURA 1. Exerciţiul 14.

14. a.

b. Pentru a determina punctul de intersecţie al reprezentărilor grafice ale funcţiilor f şi g rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} y &= 2x+5 \\ y &= x+2 \end{cases}$$

Scăzând din prima ecuaţie cea de a două ecuaţie avem: $0 = 2x+5-x-2$ echivalent cu $x+3=0$ sau $x=-3$. Pentru $x=-3$ obţinem $y=-3+2=-1$. Deci punctul de intersecţie este punctul de coordonate $\boxed{(-3,-1)}$.

c. Fie $M(-3-1)$ punctul de intersecţie al graficelor funcţiilor f şi g. Funcţia f intersectează axa Oy in punctul $N(0,5)$, iar funcţia g intersectează axa Oy in punctul $P(0,2)$. Se cere aria triunghiul MNP. Avem $A_{MNP} = \frac{NP \cdot d(M,NP)}{2} = \frac{3\cdot 3}{2} = \boxed{\frac{9}{2}}$.

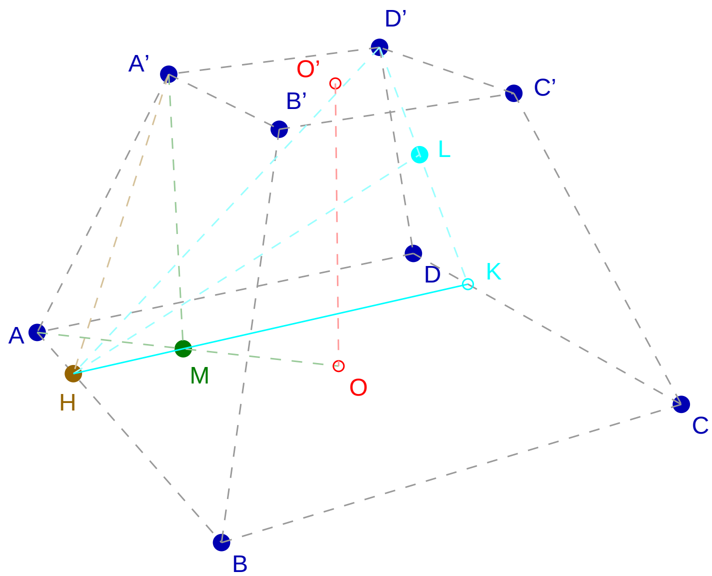

FIGURA 2. Exerciţiul 15.

15. a.

b. Fie OO' înălţimea trunchiului de piramidă şi M piciorul perpendicularei din A' pe AO. Avem $AC = 8\sqrt{2}$, $A'C' = 4\sqrt{2}$, de unde deducem $AM = \dfrac{AC - A'C'}{2} = \dfrac{8\sqrt{2} - 4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$. Din ipoteză unghiul $\widehat{A'AM}$ dintre muchia laterală şi planul bazei mari, are măsura de 60°. In triunghiul dreptunghic $A'MA$ avem: $\operatorname{tg}\widehat{A'AM} = \dfrac{A'M}{AM}$, sau $\operatorname{tg} 60^\circ = \dfrac{A'M}{2\sqrt{2}}$, de unde $A'M = 2\sqrt{2} \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{6}$. Dar $A'M = OO'$, deci $OO' = \boxed{2\sqrt{6}}$.

c. $A_t = A_l + A_B + A_b = \dfrac{(P_B + P_b) \cdot a_{tr}}{2} + A_B + A_b$, unde A_B este aria bazei mari, A_b aria bazei, P_B perimetrul bazei mari, P_b perimetrul bazei mici şi a_{tr} apotema trunchiului de piramidă. Calculăm muchia laterală a trunchiului aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic $A'MA$: $AA' = \sqrt{AM^2 + A'M^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{6})^2} = \sqrt{8 + 24} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.
Fie H piciorul perpendicularei din A' pe AB. Cum $ABB'A'$ este un trapez isoscel, avem $AH = \dfrac{AB - A'B'}{2} = 2$. Conform teoremei lui Pitagora în triunghiul dreptunghic $A'HA$, $a_{tr} = A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 - 2^2} = 2\sqrt{7}$.

Substituind în formula de mai sus, deducem

$$A_t = \frac{(32+16)\cdot 2\sqrt{7}}{2} + 16 + 64 = \boxed{48\sqrt{7} + 80}$$

d. Cum $AH \| (CDC')$, distanţele de la A şi H la planul (CDC') sunt egale.
Fie K piciorul perpendicularei din D' pe CD şi L piciorul perpendicularei din H pe $D'K$. Conform reciprocei teoremei celor trei perpendiculare, $HL \perp (CDC')$. Intr-adevăr, $HL \perp D'K$, $LK \perp CD$ şi $HK \perp CD$. Deci trebuie să aflăm lungimea segmentului HL.
Cum înălţimea din D' pe HK este înălţimea trunchiului de piramidă, aria triunghiului $HD'K$ este $\dfrac{2\sqrt{6}\cdot 8}{2} = 8\sqrt{6}$. Dar pe de altă parte aceaşi arie este $\dfrac{D'K \cdot HL}{2} = \dfrac{2\sqrt{7}\cdot HL}{2} = HL\sqrt{7}$. Deducem $HL = \dfrac{8\sqrt{6}}{\sqrt{7}} = \boxed{\dfrac{8\sqrt{42}}{7}}$.

CAPITOLUL 2

Varianta 62

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $7 \cdot 6 - 6 = 42 - 6 = \boxed{36}$.
2. Media aritmetică a numerelor 41 şi 17 este $\frac{41+17}{2} = \frac{58}{2} = \boxed{29}$.
3. Un kilogram de mere de acelasi fel costă $\frac{7,50}{5} = \boxed{1,50}$ lei.
4. Rădăcina pătrată a numărului 441 este $\boxed{21}$ deoarece $441 = 21^2$.
5. 1 tonă este egală cu $\boxed{1000}$ kg.
6. Linia mijlocie în trapez este egală cu semisuma lungimilor bazelor, adică $\frac{18+12}{2} = \boxed{15}$ cm.
7. Suma tuturor muchiilor paralelipipedului este $4\cdot2+4\cdot5+4\cdot4 = 8+20+16 = \boxed{44}$.
8. Raza cilindrului este $\frac{8}{2} = 4\ cm$, iar $A_l = \pi rg = \pi \cdot 4 \cdot 5 = \boxed{20\pi}$ cm^2.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{C}$: $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} - \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) = \sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.
10. $\boxed{B}$: $\frac{2a+b}{12a-5b} \overset{2a=3b}{=} \frac{3b+b}{6\cdot3b-5b} = \frac{4b}{13b} = \frac{4}{13}$.
11. $\boxed{A}$: Fie a măsura unghiului ascuţit şi b măsura unghiului obtuz. Din ipoteză avem $a = \frac{1}{5}b$. Cum într-un paralelogram $a + b = 180°$, înlocuind $b = 5a$ avem $a + 5a = 180°$, de unde $a = \frac{180°}{6} = 30°$.
12. $\boxed{B}$: Fie O centrul cercului în care este înscris hexagonul şi P proiecţia lui O pe AB. Latura hexagonului este egală cu raza cercului, deci are lungimea 4 cm. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic APO avem: $PO = \sqrt{AO^2 - AP^2} = \sqrt{4^2-2^2} = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}$ cm.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Din ipoteză ştim că 40% din numărul total de 120 de CD-uri sunt înregistrate cu filme, deci numărul de CD-uri este $\frac{40}{100} \cdot 120 = \boxed{48}$.

b. Numărul de CD-uri neînregistrate din cutie este egal cu $120 - (25 + 48 + 32) = 120 - 105 = 15$. Cum din totalul de 120 de CD-uri, 15 sunt neînregistrate, probabilitatea ca atunci când extragem un CD, acesta să fie neînregistrat este $\frac{15}{120} = \boxed{\frac{1}{8}}$.

14. a. Pentru ca 1 să fie element comun mulţimilor A şi B trebuie ca $1 \in \mathbb{Z}$, $\frac{6}{2 \cdot 1 + 1} \in \mathbb{Z}$ şi $(2 \cdot 1 + \sqrt{3})(2 - 1 \cdot \sqrt{3}) = 1$. Aceasta este echivalent cu $1 \in \mathbb{Z}$, $\frac{6}{3} \in \mathbb{Z}$ şi $2^2 - (\sqrt{3})^2 = 1$ sau $1 \in \mathbb{Z}$, $2 \in \mathbb{Z}$ şi $4 - 3 = 1$. Cum toate condiţiile sunt satisfăcute, rezultă că $1 \in A \cap B$.

b. Elementele mulţimii A sunt numerele întregi X pentru care $\frac{6}{2x+1} \in \mathbb{Z}$. Pentru ca $\frac{6}{2x+1} \in \mathbb{Z}$ trebuie ca $2x + 1$ să fie printre divizorii lui 6, adică $2x + 1 \in \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$. Dar pentru $x \in \mathbb{Z}$, numărul $2x + 1$ este impar, deci $2x + 1 \in \{-3, -1, 1, 3\}$ Rezolvăm pe rând ecuaţiile:

$$\begin{aligned} 2x + 1 = -3 &\Rightarrow x = -2 \\ 2x + 1 = -1 &\Rightarrow x = -1 \\ 2x + 1 = 1 &\Rightarrow x = 0 \\ 2x + 1 = 3 &\Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Deci $A = \{-2, -1, 0, 1\}$, iar suma elementelor sale este $\boxed{-2}$.

c. Condiţia $(2x + \sqrt{3})(2 - x\sqrt{3}) = 1$ se rescrie

$$\begin{aligned} &4x - 2x^2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3x = 1 \Leftrightarrow \\ &(x - 1) + 2\sqrt{3}(1 - x^2) = 1 \Leftrightarrow \\ &(x - 1) - 2\sqrt{3}(x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \\ &(x - 1)[1 - 2\sqrt{3}(x + 1)] = 0 \Leftrightarrow \\ &(x - 1)[-2\sqrt{3}x + 1 - 2\sqrt{3}] = 0 \end{aligned}$$

Soluţiile acestei ecuaţii sunt $x = 1 \in \mathbb{Z}$ şi $x = \frac{1 - 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} - 1 \notin \mathbb{Z}$, deci $B = \boxed{\{1\}}$.

15. a.

b. $V_{ABCDA'B'C'D'} = A_{ABCD} \cdot AA' = 6^2 \cdot 7 = 36 \cdot 7 = \boxed{252}$.

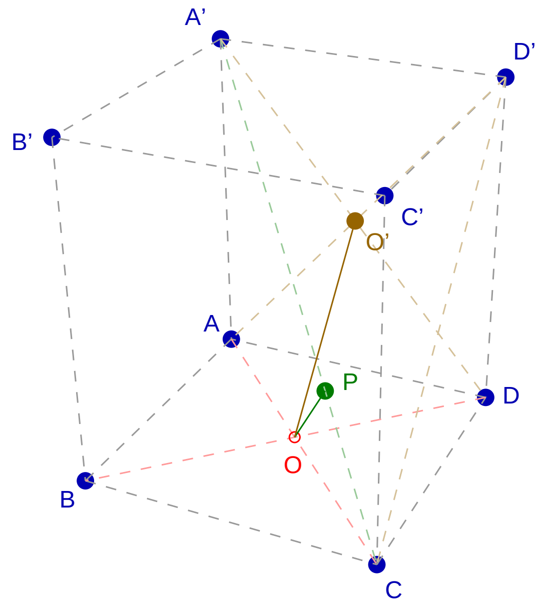

FIGURA 1. Exerciţiul 15.

c. Fie P proiecţia lui O pe $A'C$. Cum $m(\widehat{OPC}) = m(\widehat{A'AC}) = 90^\circ$ şi $m(\widehat{PCO}) = m(\widehat{ACA'})$ rezultă că triunghiurile OPC şi $A'AC$ sunt asemenea. Din asemănarea lor avem $\frac{OP}{AA'} = \frac{OC}{A'C}$, de unde $OP = \frac{OC \cdot AA'}{A'C}$.
Dar $OC = \frac{AC}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$, iar $A'C$ este diagonala prismei şi se poate afla din triunghiul dreptunghic $A'AC$ prin aplicarea teoremei lui Pitagora: $A'C = \sqrt{AA'^2 + AC^2} = \sqrt{7^2 + (6\sqrt{2})^2} = \sqrt{49 + 72} = \sqrt{121} = 11$. Revenind la calculul lui OP avem: $OP = \frac{3\sqrt{2} \cdot 7}{11} = \boxed{\frac{21\sqrt{2}}{11}}$.

d. OO' este linie mijlocie în triunghiul $D'AC$, deci $OO' \| D'C$. Cum $D'C \perp BC$ rezultă că $OO' \perp BC$ deci $m(\widehat{OO', BC}) = \boxed{90^\circ}$.

CAPITOLUL 3

Varianta 63

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $3 \cdot 5 + 5 = 15 + 5 = \boxed{20}$.
2. Mai mare este numărul $\boxed{a = 2,12}$.
3. Cel mai mic număr natural de 4 cifre divizibil cu 3 este $\boxed{1002}$. Reamintim că un număr natural este divizibil cu 3 dacă şi numai dacă suma cifrelor sale este divizibilă cu 3.
4. Din totalul de 10 bile din urnă 3 bile sunt albe, deci probabilitatea ca extrăgând o bilă aceasta să fie albă este $\boxed{\dfrac{3}{10}}$.
5. Mediana corespunzătoare ipotenuzei este jumătate din ipotenuză, deci are lungimea $\dfrac{10}{2} = \boxed{5}$ cm.
6. Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este $360°$. Cum suma a două dintre unghiuri este $200°$, suma celorlalte unghiuri este $360° - 200° = \boxed{160°}$.
7. $V_{\text{sferă}} = \dfrac{4\pi r^3}{3} = \dfrac{4\pi 4^3}{3} = \boxed{\dfrac{256}{3}}\pi \text{ cm}^3$.
8. Cum aria laterală este este produsul dintre perimetrul bazei şi înălţime, rezultă că perimetrul pătratului este $\dfrac{30}{5} = \boxed{6}$ cm.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{A}$: Fia a şi b numerele căutate. Ipoteza se transcrie în următoarele două relaţii: $a + b = 200 \quad (1)$ şi $\dfrac{a}{3} = \dfrac{b}{7} \quad (2)$. Din (2) avem $b = \dfrac{7a}{3}$ şi înlocuind în (1) obţinem: $a + \dfrac{7a}{3} = 200$ echivalent cu $\dfrac{10a}{3} = 200$, de unde $a = \dfrac{3 \cdot 200}{10} = 60$. Pentru $a = 60$ găsim $b = 200 - a = 200 - 60 = 140$. Produsul numerelor a şi b este $60 \cdot 140 = 8400$.
10. $\boxed{B}$: Folosind formula $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, ecuaţia $(2x + 1)^2 - 2 = 2x(2x + 3) - 5$ se rescrie $4x^2 + 4x + 1 - 2 = 4x^2 + 6x - 5$, ceea ce este echivalent cu $4x^2 + 4x + 1 - 2 - 4x^2 - 6x + 5 = 0$, sau $-2x + 4 = 0$, de unde $x = \dfrac{-4}{-2} = 2$.

11. $\boxed{C}$: Fia a muchia cubului. Cum cubul are 12 muchii, avem $12a = 24$, de unde $a = 2$ cm.
12. $\boxed{D}$: Fie triunghiul ABC cu $m(\widehat{A}) = 90°$, $AC = 30$ şi fie D proiecţia lui A pe ipotenuza BC. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic ADC avem $AD = \sqrt{AC^2 - DC^2} = \sqrt{30^2 - 18^2} = \sqrt{900 - 324} = \sqrt{576} = 24$. Aplicând teorma catetei în triunghiul dreptunghic ABC, avem: $AC^2 = DC \cdot BC$ sau $30^2 = 18 \cdot BC$. Deci, $BC = \dfrac{900}{18} = 50$. Prin urmare aria triunghiului este egală cu $\dfrac{BC \cdot AD}{2} = \dfrac{50 \cdot 24}{2} = 600\,\text{cm}^2$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. $B = \{b \in \mathbb{N} | b \leq 20 \text{ şi } b \text{ număr par}\} = \{0, 2, 4, 6, ..., 18, 20\}$. Cum zero este un element al mulţimii B produsul elementelor lui B este $\boxed{0}$.
    b. $A = \{a \in \mathbb{N} | a \leq 23 \text{ şi } a \text{ număr impar}\} = \{1, 3, 5, ..., 21, 23\}$. Mulţimea A are 12 elemente, iar mulţimea B 11 elemente şi cum ele nu au nici un element în comun, mulţimea $A \cup B$ are $11 + 12 = \boxed{23}$ elemente.
14. a. Perechea $(1, 2)$ este soluţie a ecuaţiei $2x + 3y = 8$ căci $2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8$.

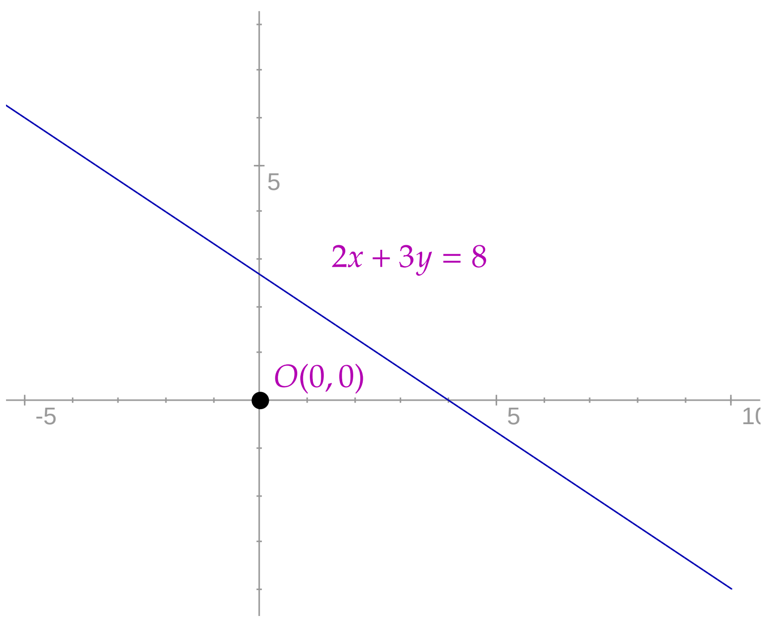

FIGURA 1. Exerciţiul 14.

b.

c. Sistemul:

$$\begin{cases} 2(2x + 3y) + 3(x + y) & = & 8 \\ (2x + 3y) - 3(x + y) & = & -5 \end{cases}$$

este echivalent cu:

$$\begin{cases} 4x + 6y + 3x + 3y = 8 \\ 2x + 3y - 3x - 3y = -5 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} 7x + 9y = 8 \\ -x = -5 \end{cases}$$

Avem deci, $x = \boxed{5}$ şi $y = \frac{8 - 7 \cdot 5}{9} = \frac{8 - 35}{9} = \frac{-27}{9} = \boxed{-3}$.

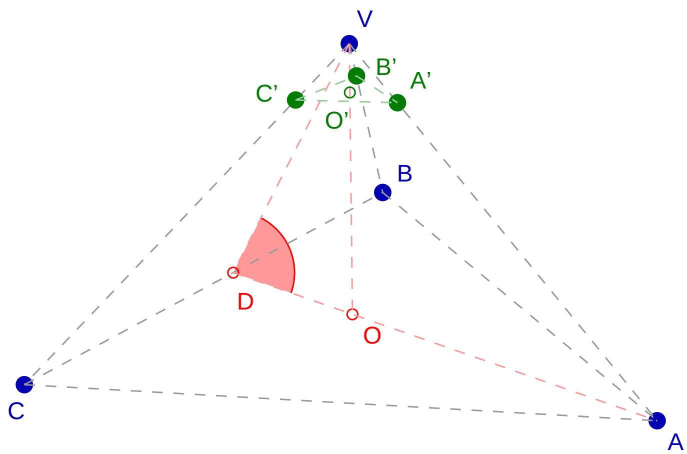

FIGURA 2. Exerciţiul 15.

15. a.

b. Fie VO înălţimea piramidei şi D intersecţia lui AO cu BC. Cum D este mijlocul lui BC, avem $VD \perp BC$ şi $AD \perp BC$, deci unghiul ADV este unghiul dintre faţa laterală(VBC) şi planul bazei (ABC) şi are măsura $60°$. În triunghiul dreptunghic VOD avem $\tan 60° = \frac{VO}{OD}$ sau $\sqrt{3} = \frac{12}{OD}$ de unde $OD = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$. Cum O este centrul de greutate al triunghiului ABC, punctul O se găseşte la o treime de bază, adică $OD = \frac{AD}{3}$. Avem deci $AD = 3 \cdot OD = 3 \cdot 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$. În triunghiul dreptunghic ADC avem $\sin \widehat{ACD} = \frac{AD}{AC}$, ceea ce este echivalent cu $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{AC}$, de unde $AC = \frac{12\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{3}} = 24$.

c. $A_t = 3A_{VBC} + A_{ABC} = 3 \cdot \frac{VD \cdot BC}{2} + \frac{AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ}{2}$. Calculăm VD din triunghiul dreptunghic VOD: $\sin 60^\circ = \frac{VO}{VD}$, de unde $VD = \frac{VO}{\sin 60^\circ} = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{12 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}$. Prin urmare $A_t = 3 \cdot \frac{8\sqrt{3} \cdot 24}{2} + \frac{24 \cdot 24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 24 \cdot 24\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 24 \cdot 18\sqrt{3} = \boxed{432\sqrt{3}}$.

d. Fie A', B', respectiv C', intersecţia planului paralel cu planul bazei cu muchiile VA, VB, respectiv VC. Fie de asemenea O' proiecţia lui V pe planul$(A'B'C')$.
Cum $A'O' \| AO$ rezultă că triunghiurilor $VO'A'$ şi VOA sunt asemenea şi în consecinţă $\frac{VO'}{VO} = \frac{VA'}{VA}$ (1).
Din $A'B' \| AB$ rezultă asemănarea triunghiurilor $VA'B'$ şi VAB, de unde $\frac{VA'}{VA} = \frac{A'B'}{AB}$ (2).
Din (1) şi (2) deducem că: $\frac{VO'}{VO} = \frac{A'B'}{AB}$, sau $A'B' = VO' \cdot \frac{24}{12} = 2VO$.
In relaţia $V_{VA'B'C'} = \frac{1}{3} A_{A'B'C'} \cdot VO'$ substituind datele din ipoteză avem $\frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{A'B' \cdot A'C' \cdot \sin 60^\circ}{2} \cdot VO'$, de unde $16\sqrt{3} = 2VO' \cdot 2VO' \cdot \sin 60^\circ \cdot VO'$, ceea ce revine la $16\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \cdot (VO')^3$. De aici $(VO')^3 = 8$, deci $VO' = 2$. Distanţa fată de planul (ABC) la care trebuie dus planul $(A'B'C')$ este $OO' = VO - VO' = 12 - 2 = \boxed{10}$ cm.

CAPITOLUL 4

Varianta 64

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $29 \cdot 9 = \boxed{261}$
2. Numărul natural cerut este $2 \cdot 5 + 1 = \boxed{11}$.
3. Cantitatea de făină reprezintă $\dfrac{78}{100} = 0,78 = \boxed{78\%}$ din cantitatea de grâu.
4. Numărul prim din mulţimea $M = \{3 \cdot 11; 5 \cdot 7; 37; 3 \cdot 13\}$ este $\boxed{37}$.
5. Conform teoremei lui Pitagora, ipotenuza are lungimea $\sqrt{9^2 + 9^2} = \sqrt{9^2 \cdot 2} = \boxed{9\sqrt{2}}$ cm.
6. Perimetrul hexagonului este $6 \cdot 7 = \boxed{42}$ cm.
7. Baza cilindrului este un cerc de arie $\pi r^2 = \pi \cdot 3^2 = \boxed{9}\pi\,\mathrm{cm}^2$.
8. $A_l = 4 \cdot A_{\text{unei feţei laterale}} = 4 \cdot \dfrac{10 \cdot 13}{2} = 20 \cdot 13 = \boxed{260}\,\mathrm{dm}^2$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{D}$: Cifra 3 apare în scrierea următoarelor numere de la 10 la 40:
$$13, 23, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39,$$
adică de 13 ori.
10. $\boxed{C}$: Avem $-2x \geq -6$ echivalent cu $2x \leq 6$ sau $x \leq 3$. Soluţiile inecuaţiei în mulţimea numerelor naturale sunt $\{0, 1, 2, 3\}$, deci avem 4 soluţii.
11. $\boxed{A}$: Fie L lungimea şi l lăţimea dreptunghiului. Cum perimetrul dreptunghiului este 20 cm avem relaţia $2L + 2l = 20$ sau $L + l = 10 \quad (1)$. Din ipoteză $l = \dfrac{1}{4}L$ şi înlocuind în relaţia (1) avem: $L + \dfrac{1}{4}L = 10$ echivalent cu $\dfrac{5}{4}L = 10$, de unde $L = \dfrac{40}{5} = 8$, iar $l = \dfrac{1}{4} \cdot 8 = 2$. Deci aria dreptunghiului este $L \cdot l = 8 \cdot 2 = 16\,\mathrm{cm}^2$.
12. $\boxed{B}$: Fie ABC secţiunea axială a conului şi O proiecţia lui A pe BC. În triunghiul dreptunghic AOB avem $\sin\widehat{ABO} = \dfrac{AO}{AB}$, sau $\sin 60^\circ = \dfrac{6}{AB}$, de unde
$$AB = \frac{6}{\sin 60^\circ} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}\,\text{cm}.$$

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. În cutie avem 2 bile verzi dintr-un total de 20 de bile, deci probabilitatea ca extrăgând o bilă aceasta să fie verde este $\frac{2}{20} = \boxed{10\%}$.

b. Din ipoteză ştim că 14 bile nu sunt negre, de unde deducem că $20-14 = 6$ bile sunt negre, apoi 15 bile nu sunt galbene, deci $20 - 15 = 5$ bile sunt galbene. Prin urmare în cutie sunt 20 de bile dintre care 6 negre, 5 galbene, 2 verzi şi restul rosii, adică $20 - (6 + 5 + 2) = 20 - 13 = \boxed{7}$ bile sunt roşii.

14. a. Ecuaţia $x^2 - x - 6 = 0$ se rescrie $(x^2 - 4) - (x + 2) = 0$ echivalent cu $(x - 2)(x + 2) - (x + 2) = 0$ sau $(x + 2)(x - 3) = 0$, de unde $x_1 = \boxed{-2} \in \mathbb{Z}$, $x_2 = \boxed{3} \in \mathbb{Z}$

b. Avem $E(x) = \dfrac{3(x^2 - 6x + 9)}{x(x + 1)(x^2 - x - 6)} \overset{(a)}{=} \dfrac{3(x - 3)^2}{x(x + 1)(x + 2)(x - 3)}$. Cum $x(x + 1)(x + 2)$ se divide cu 3 pentru orice $x \in \mathbb{Z}$ (produs de trei numere întregi consecutive) rezultă că $E(x)$ se simplifică cu $3(x - 3)$, $\forall x \in \mathbb{N}^* \setminus \{3\}$.

c. Pentru ca fracţia să se simplifice cu 2, atât numitorul cât şi numărătorul trebuie să fie numere pare. Să observăm că numărătorul este par dacă şi numai dacă n este impar. Cum $E(n)$ se simplifică cu $n-3$, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{3\}$ şi pentru orice n impar $n - 3$ este par (diferenta de numere impare este număr par), rezultă că pentru orice $\boxed{n \neq 3 \text{ impar}}$, $E(n)$ se simplifică cu 2.

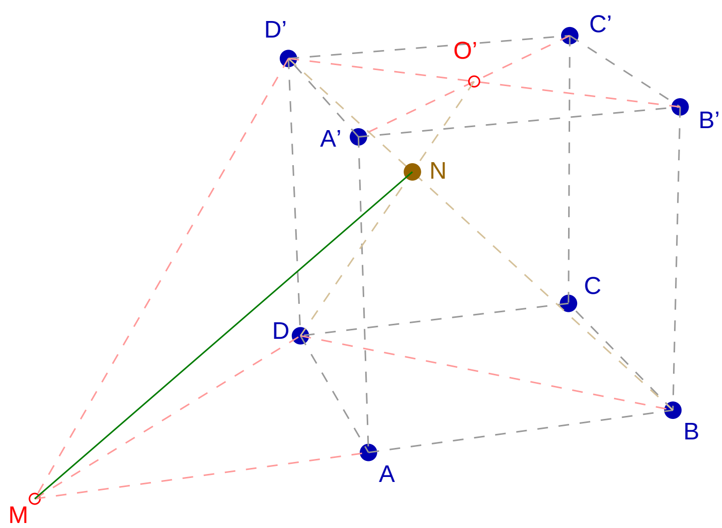

FIGURA 1. Exerciţiul 15.

15. a.

b. Demonstrăm că MD este perpendiculară pe două drepte concurente din planul $(D'DB)$, de unde rezultă $MD \perp (D'DB)$. Cum $DD' \perp (ABCD)$ şi $MD \subset (ABCD)$, avem că $DD' \perp MD$. Triunghiurile DAM şi DAB sunt dreptunghice şi isocele, deci $m(\widehat{ADM}) = m(\widehat{ADB}) = 45°$, de unde $m(\widehat{MDB}) = m(\widehat{ADM}) + m(\widehat{ADB}) = 90°$. Prin urmare, $MD \perp DB$, $MD \perp DD'$, $DB \subset (D'DB')$ şi $DD' \subset (D'DB')$, de unde rezultă $MD \perp (D'DB')$.

c. **Prima soluţie** Fie N proiecţia lui D pe BD'. Din $MD \perp (BDD'B)$, $DN \perp BD'$ şi $BD' \subset (BDD'B')$ conform teoremei celor trei perpendiculare avem $MN \perp BD'$. Deci distanţa de la M la MD' este distanţa MN. Pentru calculul lui MN avem nevoie de MD şi DN. BD este diagonala pătratului $ABCD$ şi are lungimea 10. BD' este diagonala dreptunghiului $BDD'B'$ şi are lungimea egală cu $\sqrt{10^2 + (5\sqrt{2})^2} = \sqrt{100+50} = 5\sqrt{6}$. Cum triunghiul dreptunghic BDM are un unghi de $45°$ rezultă că este isoscel, deci $BD = MD = 10$. DN este înălţime în triunghiul dreptunghic $D'DB$ şi din egalitatea ariilor avem: $\dfrac{DD' \cdot DB}{2} = \dfrac{DN \cdot BD'}{2}$ sau $5\sqrt{2} \cdot 10 = DN \cdot 5\sqrt{6}$, de unde $DN = \dfrac{50\sqrt{2}}{5\sqrt{6}} = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$. In triunghiul dreptunghic MDN cu teorema lui Pitagora avem: $MN = \sqrt{MD^2 + DN^2} = \sqrt{10^2 + \left(\dfrac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{100 + \dfrac{100 \cdot 3}{9}} = 10\sqrt{1 + \dfrac{3}{9}} = 10\sqrt{\dfrac{12}{9}} = \boxed{\dfrac{20\sqrt{3}}{3}}$.

A doua soluţie - mai scurtă. In triunghiul $MD'B$ avem $MB \perp AD'$ (căci $MB \perp (ADD'A')$), deci AD' este înălţime. Avem $MB = 2 \cdot AB = 10\sqrt{2}$ şi $AD' = AD\sqrt{2} = 10$, deci aria triunghiului $MD'B$ este $\dfrac{MB \cdot AD'}{2} = \dfrac{10\sqrt{2} \cdot 10}{2} = 50\sqrt{2}$.

Atunci distanţa de la M la BD' este $d = \dfrac{2 \cdot \text{Aria}_{\Delta MD'B}}{BD'} = \dfrac{100\sqrt{2}}{5\sqrt{6}} = \boxed{\dfrac{20\sqrt{3}}{3}}$.

d. Fie $D'B \cap DO' = \{N\}$. Arătăm că triunghiurile dreptunghice $DD'O'$ şi BDD' sunt asemenea. Este suficient să remarcăm că $\dfrac{BD}{DD'} = \dfrac{10}{5\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{5} = \dfrac{DD'}{D'O'}$. Atunci $\widehat{NDD'} + \widehat{DD'N} = \widehat{DBD'} + \widehat{DD'B} = 90°$, deci triunghiul $DD'N$ este dreptunghic. Astfel $D'B \perp DO'$.

CAPITOLUL 5

Varianta 65

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $(1+2\cdot 4):3=9:3=\boxed{3}$
2. Mai mic este numărul $\boxed{a=3,(1)}$
3. Din cele 6 numere posibile 3 sunt pare, deci probabilitatea este $\frac{3}{6}=\boxed{\frac{1}{2}=50\%}$.
4. $f(-1)=2-(-1)=2+1=\boxed{3}$
5. $A_{disc}=\pi r^2=\pi\cdot 12^2=\boxed{144}\pi\,\text{cm}^2$
6. Diagonalele rombului sunt perpendiculare şi formează 4 triunghiuri dreptunghice cu catetele măsurând jumătate din diagonale, adică 3, respectiv 4. Latura rombului este ipotenuză într-un astfel de triunghi dreptunghic, deci are lungimea egală cu $\sqrt{3^2+4^2}=\boxed{5}$ cm.
7. $A_l=2\pi RG=2\pi\cdot 5\cdot 6=\boxed{60}\pi\,\text{cm}^2$
8. $V_{\text{piramidă}}=\frac{1}{3}\cdot A_b\cdot h$, unde A_b este aria bazei şi h înălţimea piramidei. Înlocuind datele date de ipoteză avem: $64=\frac{1}{3}\cdot A_b\cdot 12$, de unde $A_b=\frac{64\cdot 3}{12}=\boxed{16}\,\text{cm}^2$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{D}$: $|2x|<4$ este echivalent cu $-4<2x<4$ sau $-2<x<2$. Deci $A=(-2,2)$.
10. $\boxed{A}$: $a=\left(1-\frac{1}{2}\right)^2:\left(\frac{1}{2}-1\right)^3=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}=\frac{1}{4}\cdot\frac{-8}{1}=-2$.
11. $\boxed{C}$: Înălţimea AD este şi bisectoare într-un triunghi isocel, deci $\widehat{CAD}=\widehat{BAD}=90^\circ-70^\circ=20^\circ$.
12. $\boxed{D}$: $A_{ABCD}=2\cdot A_{ABD}=2\cdot\frac{AB\cdot AD\cdot\sin 30^\circ}{2}=4\cdot 8\cdot\frac{1}{2}=16\,\text{cm}^2$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Fie b, respectiv r, metri de material folosiţi pentru confecţionarea unei bluze, respectiv unei rochii. Datele problemei se transcriu în următoarele două relaţii: $4b+3r = 17 \quad (1)$ şi $3b+2r = 12 \quad (2)$. Înmulţind relaţia (1) cu -2, relaţia (2) cu 3 şi adunându-le obţinem: $b = -34+36 = \boxed{2}$, de unde $b = \dfrac{12-3b}{2} = \dfrac{12-6}{2} = 3$.

b. Presupunând că se foloseşte acelaşi tip de material la rochii şi la bluze, raportul preţurilor este raportul suprafeţei de material, care este raportul lungimilor de material folosite. In cazul de faţă $\dfrac{3}{2} = 1,5 = \boxed{150}\,\%$.

Comentariu: Enunţul a fost complicat în mod inutil introducându-se preţul. Ceea ce s-a reuşit este doar un enunţ mai confuz. Nu ni se spune clar la acest punct că se foloseşte acelaşi tip de material aşa că nu putem compara preţurile.

14. a. $F(2) = \dfrac{2^2-2-2}{2^2-2} = \boxed{0}$

b. $7\cdot F(x) = 9$ este echivalentă cu $7(x^2-x-2) = 9(x^2-2)$, sau $7x^2-7x-14 = 9x^2-18$, sau $9x^2-18-7x^2+7x+14 = 0$. Avem deci de rezolvat ecuaţia de gradul doi: $2x^2+7x-4 = 0$. Discriminantul ecuaţiei este $\Delta = 7^2-4\cdot 2\cdot(-4) = 49+32 = 81$, de unde soluţiile sunt: $x_1 = \dfrac{-7-9}{2\cdot 2} = \dfrac{-16}{4} = \boxed{-4}$, $x_2 = \dfrac{-7+9}{2\cdot 2} = \dfrac{2}{4} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$.

c. Pentru a număr raţional, $F(a)$ este de asemenea număr raţional, deci $\sqrt{2}\cdot F(a)$ este raţional dacă şi numai dacă $F(a) = 0$. Aceasta revine la $a^2-a-2 = 0$ ceea ce se rescrie $(a^2-1)-(a+1) = 0$ sau $(a+1)(a-1-1) = 0$, de unde $a_1 = \boxed{-1}$, $a_2 = \boxed{2}$.

15. a.

b. Determinăm latura l a bazei. În triunghiul dreptunghic $B'BD$ conform teoremei lui Pitagora, $BD = \sqrt{B'D^2-BB'^2} = \sqrt{(3\sqrt{41})^2-9^2} = \sqrt{9\cdot 41-9^2} = \sqrt{9(41-9)} = 3\sqrt{32} = 12\sqrt{2}$. Ştiind că diagonala pătratului este egală cu $l\sqrt{2}$, deducem că latura pătratului este $l = 12$ cm.

Atunci $V_{ABCDA'B'C'D'} = A_{ABCD}\cdot AA' = AB^2\cdot AA' = 12^2\cdot 9 = 144\cdot 9 = \boxed{1296}\ \mathrm{cm}^3$

c. Notăm cu O centrul bazei $ABCD$. Triunghiul $AD'C$ este isocel (feţele laterale sunt congruente şi $D'A = D'C$ sunt diagonalele feţelor laterale) şi O este mijlocul lui AC. Cum mediana într-un triunghi isoscel este şi înălţime avem $A_{AD'C} = \dfrac{D'O\cdot AC}{2}$. Avem nevoie de $D'O$ pe care o aflăm prin aplicarea teoremei lui Pitagora în triunghiul dreptunghic

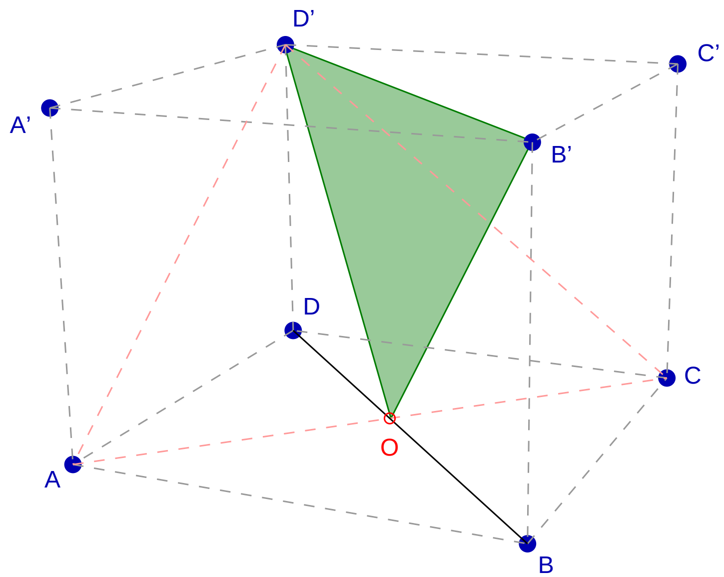

FIGURA 1. Exercițiul 15.

$D'DO$: $D'O = \sqrt{DD'^2 + DO^2} = \sqrt{9^2 + (6\sqrt{2})^2} = \sqrt{81+72} = \sqrt{153} = 3\sqrt{17}$. Deci, $A_{AD'C} = \frac{DO' \cdot AC}{2} = \frac{3\sqrt{17} \cdot 12\sqrt{2}}{2} = \boxed{18\sqrt{34}}\,\text{cm}^2$.

d. **Prima rezolvare.**
Fie P proiecţia lui B' pe $D'O$. Din $B'P \perp D'O$, $D'O \perp AC$ (triunghiul $AD'C$ este isoscel şi mediana $D'O$ este şi înălţime), $B'O \perp AC$ (triunghiul $AB'C$ este isoscel şi mediana $B'O$ este şi înălţime) şi $AC \subset (AD'C)$ rezultă conform reciprocei teoremei celor trei perpendiculare că $B'P \perp (AD'C)$. Deci distanţa căutată este distanţa $B'P$. Pentru aflarea lui $B'P$ exprimăm aria triunghiului $B'OD'$ in două moduri. Pe de o parte $A_{B'OD'} = \frac{B'D' \cdot BB'}{2} = \frac{12\sqrt{2} \cdot 9}{2} = 54\sqrt{2}$, iar pe de alta $A_{B'OD'} = \frac{B'P \cdot D'O}{2}$. Egalând cele două arii avem: $\frac{B'P \cdot 3\sqrt{17}}{2} = 54\sqrt{2}$, de unde $B'P = \frac{2 \cdot 54\sqrt{2}}{3\sqrt{17}} = \frac{36\sqrt{2}}{\sqrt{17}} = \boxed{\frac{36\sqrt{34}}{17}}$.

A doua rezolvare.
Fie h distanţa de la B' la planul $(AD'C)$. Avem $V_{ABCDA'B'C'D'} = V_{B'AD'C} + V_{BAB'C} + V_{C'B'CD'} + V_{A'ADD'} + V_{DACD'}$ (1). Piramidele $BAB'C$, $C'B'CD'$, $A'ADD'$, $DACD'$ au acelasi volum şi anume $\frac{1}{3} \cdot \frac{12 \cdot 12}{2} \cdot 9 = 216$. Deci relaţia (1) se rescrie: $1296 = \frac{1}{3} \cdot A_{ACD'} \cdot h + 4 \cdot 216$ ceea ce este echivalent

cu $\frac{1}{3} \cdot 18\sqrt{34} \cdot h = 1296 - 864$ sau $6h\sqrt{34} = 432$, de unde $h = \frac{432}{6\sqrt{34}} = \frac{72}{\sqrt{34}} = \boxed{\frac{36\sqrt{34}}{17}}$.