BAC 2007

Pro–Didactica

Testare Naţională

Rezolvările variantelor 6–10

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

Cuprins

CAPITOLUL 1

Varianta 6

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $(17-3)+5=14+5=\boxed{19}$.
2. Mai mic este numărul $\boxed{a=2,17}$.
3. Cel mai mic multiplu comun al numerelor 2 şi $15=3\cdot 5$ este $2\cdot 3\cdot 5=\boxed{30}$.
4. Cum $A=\{0,1,2\}$, cel mai mare număr natural din mulţimea A este $\boxed{2}$.
5. Aria unui triunghi echilateral cu latura l este $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$. In cazul de faţă aria este $\frac{4^2\sqrt{3}}{4}=\boxed{4\sqrt{3}}$.
6. Coarda de lungimea maximă este diametrul cercului. Deci AB are lungimea maximă egală cu $2\cdot 4=\boxed{8}$.
7. Perimetrul dreptunghiului este $2l+2L$, unde l şi L sunt lăţimea, respectiv lungimea dreptunghiului. Avem deci perimetrul dreptunghiului egal cu $2\cdot 2+2\cdot 5=\boxed{14}$.
8. Aria laterală a conului este $\pi RG=\pi\cdot 3\cdot 5=\boxed{15\pi}$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{C}$: Discriminantul ecuaţiei $2x^2-5x+2=0$ este
$$\Delta=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 2=25-16=9,$$
de unde $x_1=\frac{5+3}{4}=2$ şi $x_2=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2}$.

10. $\boxed{B}$: Avem
$$\begin{aligned}a^2 &= \left(\sqrt{4-\sqrt{15}}+\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^2\\ &= \left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^2+2\sqrt{4-\sqrt{15}}\sqrt{4+\sqrt{15}}+\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^2\\ &= 4-\sqrt{15}+2\sqrt{4^2-(\sqrt{15})^2}+4+\sqrt{15}\\ &= 8+2\sqrt{16-15}=8+2=10\end{aligned}$$

11. $\boxed{B}$: Avem $\dfrac{xy}{z} = \dfrac{(a^2+a)(a-1)}{a^2-1} = \dfrac{a(a+1)(a-1)}{(a-1)(a+1)} = a$.

12. $\boxed{A}$: Cum cateta care se opune unghiului de $30°$ este jumătate din ipotenuză , insemnă că lungimea ipotenuzei este 8. Cercul circumscris triunghiului dreptunghic are drept diametru ipotenuza triunghiului, deci raza cercului este 4.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Fie l lungimea autostrăzii. Conform ipotezei în primul an s-a construit $\dfrac{1}{4}\cdot l$. Deci a mai rămas de construit $\dfrac{3}{4}\cdot l$. In al doilea an s-a construit 60% din $\dfrac{3}{4}\cdot l$, iar restul de 40% din $\dfrac{3}{4}\cdot l$ a fost realizat în al treilea an. Cum în al treilea an s-au construit $72\ km$, avem $72 = \dfrac{40}{100}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot l = \dfrac{3}{10}l$, de unde $l = \dfrac{72\cdot 10}{3} = \boxed{240}$ km.

b. Cum lungimea autostrăzii este $240\ km$ şi în al treilea an s-au realizat $72\ km$, avem că in primii doi ani s-au realizat $240 - 72 = 168\ km$ de autostradă. Pentru a aflat costul lucrării pe primii doi ani, aplicăm regula de 3 simplă. Astfel, dacă pentru $240\ km$ s-au cheltuit 2800 milioane euro, pentru $168\ km$ se vor cheltui x milioane euro. Avem deci $x = \dfrac{2800\cdot 168}{240} = \boxed{1960}$ milioane euro.

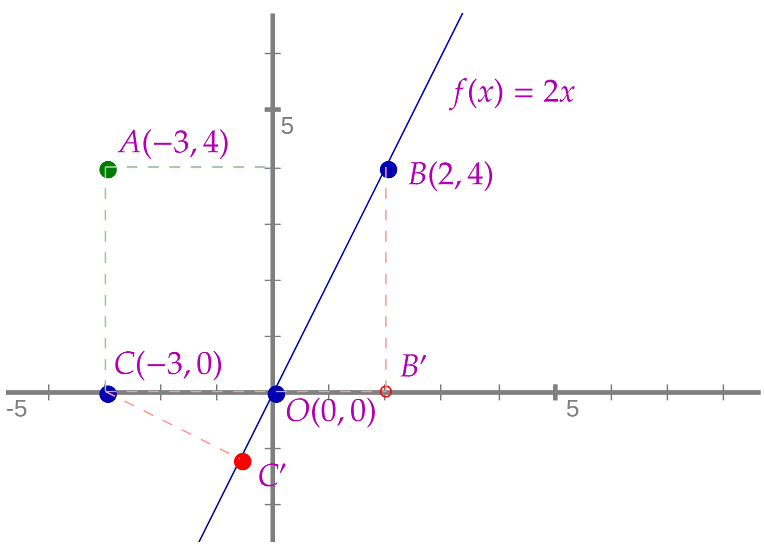

Figura 1. Exerciţiul 14.

14. a. $\boxed{A(-3,4)}$

b. Cum reprezentarea grafică a funcţiei f este dreapta OB, înseamnă că punctele $O(0,0)$ şi $B(2,4)$ aparţin graficului funcţiei f. Acesta este echivalent cu $f(0) = 0$ şi $f(2) = 4$. Din $f(0) = 0$ avem $\boxed{b = 0}$, iar din $f(2) = 4$ deducem $\boxed{a = 2}$.

c. Fie B' proiecţia lui B pe axa Ox şi C' proiecţia lui C pe dreapta OB. Triunghiurile dreptunghice $OB'B$ şi $OC'C$ sunt asemenea (mai au o pereche de unghiuri egale). Avem atunci $\frac{OB}{OC} = \frac{BB'}{CC'}$, ceea ce revine la $\frac{\sqrt{2^2 + 4^4}}{3} = \frac{4}{CC'}$. De aici

$$CC' = \frac{12}{\sqrt{20}} = \boxed{\frac{6\sqrt{5}}{5}}$$

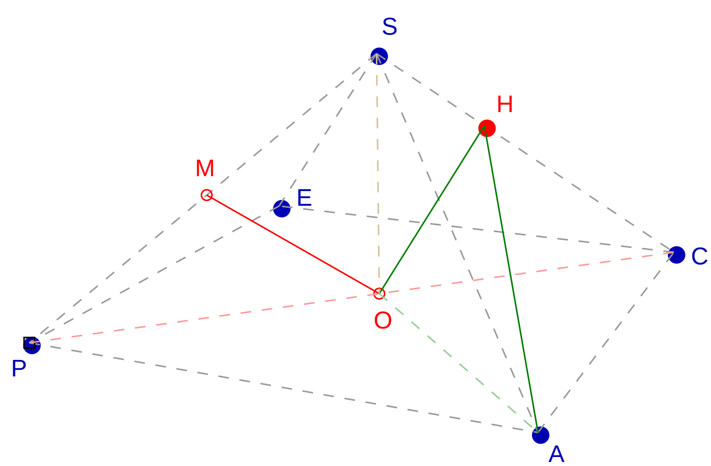

FIGURA 2. Exerciţiul 15.

15. a.

b. $\text{Volum}_{SPACE} = \frac{1}{3} \cdot \text{Aria}_{PACE} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 6 = 2 \cdot 144 = \boxed{288}$.

c. MO este linie mijlocie în triunghiul SPC, deci $MO \| SC$. Cum SC se află în planul (SEC) şi $MO \| SC$, rezultă că $MO \| (SEC)$.

d. Fie H piciorul perpendicularei din O pe SC. Cum $AO \perp (SPC)$ şi $OH \perp SC$, conform teoremei celor trei perpendiculare rezultă că $AH \perp SC$. Unghiul dintre planele (SPC) şi (SAC) este $\widehat{AHO}$. Din triunghiul dreptunghic SOC avem $OH = \frac{OC \cdot SO}{SC} = \frac{6 \cdot 6\sqrt{2}}{6\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Cum

$$\operatorname{tg} \widehat{AHO} = \frac{OA}{OH} = \frac{6\sqrt{2}}{\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$$

rezultă că $\widehat{AHO} = \boxed{60^\circ}$.

CAPITOLUL 2

Varianta 7

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $8 \cdot 4 + 5 = 32 + 5 = \boxed{37}$.
2. Numărul trei mii doi, în baza zece se scrie $\boxed{3002}$.
3. 30% din 120 este egal cu $\frac{30}{100} \cdot 120 = \boxed{36}$.
4. Forma ireductibilă a lui $\frac{44}{64}$ este $\boxed{\frac{11}{16}}$.
5. $1 + 2 + 3 + 6 = \boxed{12}$.
6. Fie $ABCD$ rombul cu latura de $6\ cm$ şi măsura unghiului ABC de $60°$. Avem

$$A_{ABCD} = 2A_{ABC} = 2\frac{AB \cdot BC \cdot \sin \widehat{ABC}}{2} = 6 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{18\sqrt{3}}$$

7. Pentru un cub cu latura de lungime a, avem $A_{\text{totală}} = 6a^2$. In cazul de faţă $A_{\text{totală}} = \boxed{6}$.
8. Pentru un con cu lungimea razei bazei r şi înălţimea h, volumul este $V_{con} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$. In cazul de faţă $V_{con} = \frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 10 = \boxed{120\pi}$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{A}$: Inecuaţia $2x - 5 < 3x$ este echivalentă cu $-5 < 3x - 2x$ sau $-5 < x$. Deci $x \in (-5, \infty)$.
10. $\boxed{C}$: Ecuaţia $\frac{7+\sqrt{11}}{x} = \frac{2}{7-\sqrt{11}}$ este echivalentă cu $(7+\sqrt{11})(7-\sqrt{11}) = x \cdot 2$ sau $7^2 - (\sqrt{11})^2 = 2x$. De unde $x = \frac{49-11}{2} = \frac{38}{2} = 19$.
11. $\boxed{D}$: Fie x şi y cu $x < y$, măsurile unghiurilor complementare. Avem $x + y = 90° \quad (1)$ şi $\frac{x}{y} = \frac{1}{5} \quad (2)$. Din ecuaţia (1), $y = 90 - x$ şi înlocuind în ecuaţia (2) obţinem: $\frac{x}{90-x} = \frac{1}{5}$ sau $5x = 90 - x$, de unde $x = \frac{90}{6} = 15°$

12. $\boxed{A}$: Observăm că $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AN}{NC} = \dfrac{1}{5}$. Făcând proporţii derivate avem: $\dfrac{AM}{AM+MB} = \dfrac{AN}{AN+NC} = \dfrac{1}{1+5}$ sau $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{1}{6}$. Tringhiurile AMN şi ABC au două laturi proporţionale şi unghiul $\hat{A}$ comun, deci sunt asemenea. Prin urmare avem: $\dfrac{BC}{MN} = \dfrac{BA}{MA} = \dfrac{CA}{NA} = \dfrac{6}{1} = 6$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Simplificăm expresia lui A. Avem

$$\begin{aligned} A &= 4^n \cdot 5^{2n+1} - 2^{2n} \cdot 25^n = 2^{2n} \cdot 5^{2n+1} - 2^{2n} \cdot 5^{2n} \\ &= 2^{2n} \cdot 5^{2n}(5-1) = 2^{2n} \cdot 5^{2n} \cdot 2^2 \\ &= 2^{2n+2} \cdot 5^{2n} = 2^{2(n+1)} \cdot 5^{2n} = (2^{n+1} \cdot 5^n)^2 = (2 \cdot 10^n)^2 \end{aligned}$$

deci pătrat perfect.

b. Conform calculului de la punctul (a), $\sqrt{A} = 2 \cdot 10^n$. Cum 10^n ia valorile $1, 10, 10^2, 10^3$ etc.singurul caz când A nu se divide cu 10 este când $10^n = 1$. Deci $\boxed{n = 0}$.

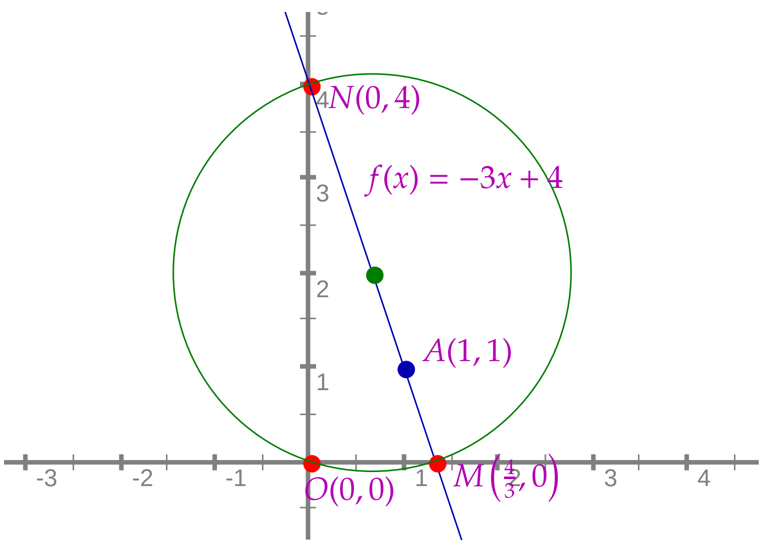

Figura 1. Exerciţiul 14.

14. a. Dacă $A(1,1)$ aparţine graficului funcţiei f avem $f(1) = 1$, ceea ce revine la $m + 2 = 1$, de unde $\boxed{m = -1}$.

b. Pentru $m = -1$, funcţia este $f(x) = -3x + 4$.

c. Avem $f(x) = -3x + 4$. Determinăm punctele de intersecţie ale graficului funcţie f cu axele de coordonate.
Intersecţia cu Ox: avem $y = f(x) = 0$ ceea ce este echivalent cu

$-3x + 4 = 0$, de unde $x = \frac{4}{3}$. Deci graficul lui f intersectează axa Ox în punctul $M\left(\frac{4}{3}, 0\right)$.
Intersecţia cu Oy: avem $x = 0$ şi $f(0) = 4$. Deci graficul lui f intersectează axa Oy în punctul $N(0, 4)$. Calculăm deci raza cercului circumscris triunghiului dreprtunghic OMN. Cercul circumscris unui triunghic dreptunghic are ca diametru ipotenuza triunghiului, deci raza este jumătate din lungimea ipotenuzei. Aplicând teorema lui Pitagora in ΔOMN avem: $MN^2 = OM^2 + ON^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 4^2 = \frac{16 \cdot 10}{9}$, de unde $MN = \frac{4\sqrt{10}}{3}$, iar raza este $\boxed{\frac{2\sqrt{10}}{3}}$

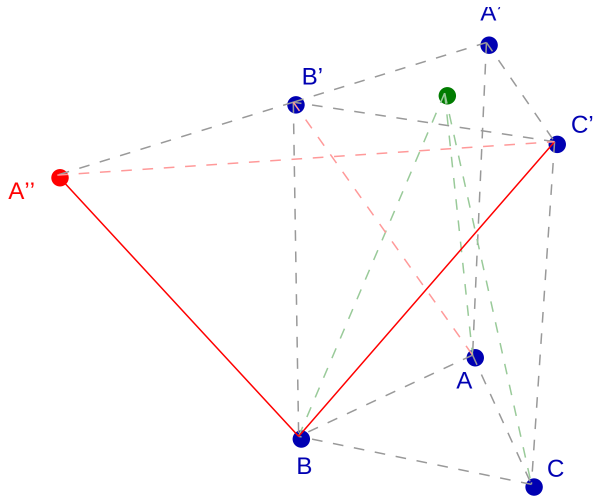

Figura 2. Exerciţiul 15.

15. a.
b. Avem $A_l = 3 \cdot A_{AA'B'B}$ (prisma este dreaptă cu baza triunghi echilateral deci feţele laterale sunt egale). Deci

$$\text{Aria}_l = 3 \cdot AB \cdot AA' = 3 \cdot 4 \cdot AA' = 12AA'$$

Din ipoteza aria laterală este 72, de unde relaţia $12AA' = 72$, sau $AA' = \frac{72}{12} = 6$.
c. Alegem drept bază a piramidei triunghiul ABC. Volumul piramidei este dat de formula $V_{\text{piramidă}} = \frac{1}{3}A_{ABC} \cdot h$ unde h este înălţimea piramidei. In cazul de faţă $h = AA'$, deci $V_{\text{piramidă}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC}}{2} \cdot AA' = \frac{1}{3} \cdot \frac{4 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \cdot 6 = \boxed{8\sqrt{3}}$.

d. Fie A'' simetricul lui A' faţă de B'. Atunci $AB = A''B'$, şi în plus $AB \| A''B'$, deci patrulaterul $ABA''B'$ este paralelogram. Ca o consecinţă AB' este paralel cu BA''. Problema se reduce la a afla sinusul unghiului $C'BA''$. Determinăm laturile triunghiului $C'BA''$.

- AB' şi BC' sunt diagonale în feţe laterale care sunt dreptunghiuri, deci $AB' = BC' = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$. In plus $BA'' = AB'$.
- Triunghiul $B'C'A''$ este isoscel iar $\widehat{C'B'A''} = 120°$. Atunci $\widehat{B'C'A''} = \frac{60°}{2} = 30°$ şi de aici $\widehat{A'C'A''} = 90°$. Folosind teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic $A'C'A''$, avem $A''C' = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$.

Fie H mijlocul lui $C'A''$. Cum triunghiul $C'BA''$ este isoscel, BH este înălţime. Cu teorema lui Pitagora în triunghiul BHA'' avem $BH = \sqrt{A''B^2 - A''H^2} = \sqrt{52 - 12} = 2\sqrt{10}$. Aria triunghiului $BC'A''$ este atunci $\frac{BH \cdot C'A''}{2} = 4\sqrt{30}$.

Dar aceaşi arie poate fi scrisă $\frac{A''B \cdot BC' \cdot \sin \widehat{A''BC'}}{2} = 26 \cdot \sin \widehat{A''BC'}$. De aici putem determina

$$\sin \widehat{A''BC'} = \frac{4\sqrt{30}}{26} = \boxed{\frac{2\sqrt{30}}{13}}$$

CAPITOLUL 3

Varianta 8

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $2007 - 1992 = \boxed{15}$
2. Cel mai mare număr întreg mai mic decât $3,42$ este $\boxed{3}$.
3. Divizorii naturali ai numărului 11 sunt 1 şi 11, deci suma lor este $\mathbf{1} + \mathbf{11} = \boxed{12}$.
4. 25% din 600kg înseamnă $\dfrac{25}{100} \cdot 600 = \boxed{150}$kg.
5. $BC = AB + AC = 14 + 5 = \boxed{19}$
6. Diagonala unui dreptunghi înscris într-un cerc este de două ori raza cercului adică $2 \cdot 4 = \boxed{8}$.
7. Fie m muchia pătratului. Aria totală a cubului este de şase ori aria unei feţe a cubului. Fiecare faţă a cubului fiind un pătrat de arie m^2, avem $A_t = 6m^2$. De unde $m^2 = \dfrac{24}{6} = 4$ şi astfel $m = \boxed{2}$.
8. $V_{\text{con}} = \dfrac{\pi r^2 h}{3} = \dfrac{6^2 \cdot 5\pi}{3} = \boxed{60\pi}\text{cm}^3$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{C}$: Aria pătratului este latura la pătrat, adică în cazul de faţă $(4 - \sqrt{5})^2 = 16 - 8\sqrt{5} + 5 = 21 - 8\sqrt{5}$.
10. $\boxed{B}$: $f(-3) = -5(-3) + 1 = 15 + 1 = 16$.
11. $\boxed{C}$: Distanţa între punctele $A(x_0, y_0)$ şi $B(x_1, y_1)$ este dată de $AB = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$. In cazul nostru avem: $AB = \sqrt{(2+2)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$.
12. $\boxed{A}$: Aria triunghiului echilateral de latura l este $\dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$. Pentru valoarea numerică a laturii din exerciţiu aria este

$$\frac{(8\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{64 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{4} = 48\sqrt{3}$$

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Ecuaţia $x+3=3x-5$ este echivalentă cu $x-3x=-3-5$ sau $-2x=-8$, de unde $\boxed{x=4}$

b. Fie c numărul camioanelor şi m numărul microbuzelor. Din ipoteză avem (1) $m=3c$. şi (2) $m-5=c+3$. Rezolvăm sistemul format din ecuaţiile (1) şi (2). Înlocuind m în a doua ecuaţie obţinem $3c-5=c+3$ sau $2c=8$. De unde $c=\boxed{4}$ camioane şi substituind în prima ecuaţie $m=\boxed{12}$ microbuse.

14. a. Perechea (x,y) aparţine mulţimii B dacă $x+y-5=0$. Cum $2+3-5=0$, perechea de numere $(2,3)$ aparţine mulţimii B.

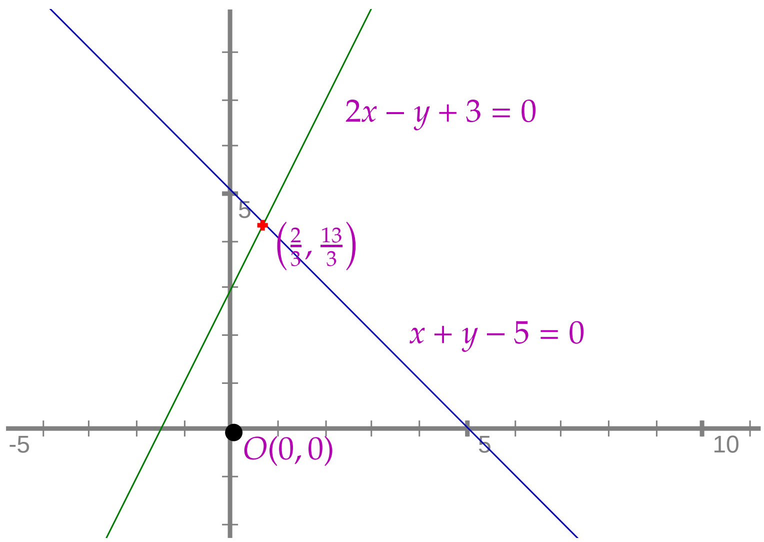

Figura 1. Exerciţiul 14.

b.

c. Elementele mulţimii $A\cap B$ sunt perechile de numere reale (x,y) care verifică $2x-y+3=0$ şi $x+y-5=0$. Pentru a găsi elementele lui $A\cap B$, rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} 2x-y+3 & = & 0 & (1) \\ x+y-5 & = & 0 & (2) \end{cases}$$

Ecuaţia (2) este echivalentă cu $x=5-y$ şi înlocuind x în ecuaţia (1) avem: $10-2y-y+3=0$ sau $-3y=-13$. Avem deci $y=\dfrac{13}{3}$ şi $x=5-\dfrac{13}{3}=\dfrac{2}{3}$. Astfel $A\cap B=\boxed{\left\{\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{13}{3}\right)\right\}}$.

15. a. Vezi pagina următoare.

b. Cum $AD\perp DD'$ şi $AD\perp DC$ rezultă $AD\perp(DCC'D')$ (perpendiculară pe două drepte concurente din acest plan). O dreaptă perpendiculară pe un plan este perpendiculară pe orice dreaptă din plan, deci $AD\perp D'C$

c. $A_{\text{laterală}} = 4A_{ABB'A'}$, unde $A_{ABB'A'} = AB \cdot AA' = 5AA'$. Pentru a calcula AA', calculăm mai întâi lungimea diagonalei bazei. In triunghiul dreptunchic ABD avem $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2}$. Din ipoteză unghiul dintre diagonala $D'B$ şi planul (ABC) este de $60°$. Cum proiecţia lui BD' pe planul (ABC) este BD unghiul dintre $D'B$ şi planul (ABC) este $\widehat{DBD'}$. Astfel în triunghiul dreptunghic BDD' avem $\operatorname{tg} 60° = \dfrac{DD'}{BD}$ sau $\sqrt{3} = \dfrac{DD'}{5\sqrt{2}}$. Avem deci $DD' = 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{6}$ şi prin urmare $A_{\text{laterală}} = 4 \cdot AB \cdot AA' = 4 \cdot 5 \cdot 5\sqrt{6} = \boxed{100\sqrt{6}}$.

d. Fie P' intersecţia dintre planul (MNQ) şi dreapta CC'. Vom arăta că $P = P'$, ceea ce va demonstra enunţul.
Observăm mai întâi că $MQ \| NP'$ şi $MN \| QP'$ (intersecţii ale unui plan cu plane paralele in fiecare caz). Patrulaterul $MNP'Q$ este deci paralelogram şi $MQ = NP'$. Fie M' proiecţia lui Q pe AA', iar N' proiecţia lui P' pe BB'. Triunghiurile $\Delta MM'Q$ şi $\Delta NN'P'$ sunt congruente, cazul ipotenuză - catetă ($N'P'$ şi QM' sunt egale cu latura pătratului de bază), deci $NN' = MM' = 7 - 5 = 2$. Atunci $CP' = BN' = BN - NN' = 1$, deci $P = P'$.

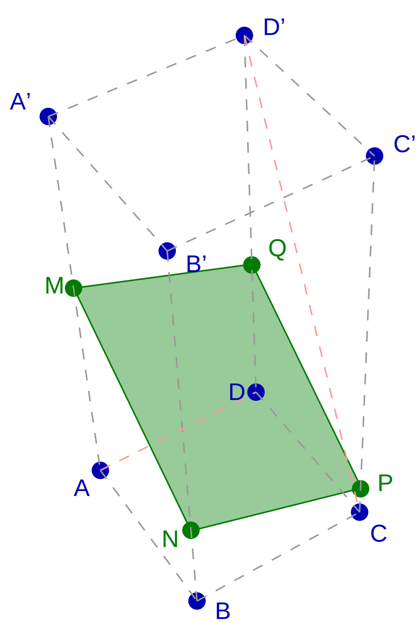

Figura 2. Exerciţiul 15.

CAPITOLUL 4

Varianta 9

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $3 \cdot 2 + 1 = 6 + 1 = \boxed{7}$.
2. $a = \boxed{\frac{13}{6}}$
3. Ecuaţia se mai scrie $0 = x^2 - 2x + 3x - 6 = x(x-2) - 3(x-2) = (x-2)(x+3)$, deci are rădăcinile $x_1 = 2$ şi $x_2 = -3$. Rădăcina naturală este $\boxed{2}$.
4. $A = \boxed{[0, 3]}$.
5. $\boxed{150} = 3 \cdot 50$.
6. $4 \cdot 12 = \boxed{48}$.
7. Generatoare este ipotenuză într-un triunghi dreptunghic cu catetele date de raza bazei şi înălţimea, deci are lungimea $\sqrt{5^2 + 12^2} = \boxed{13}$.
8. Fie l latura cubului. Volumul este atunci $125 = l^3$. Rezolvând ecuaţia avem $l = \boxed{5}$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{C}$: Avem $a = \sqrt{3^4 + 3^5} = \sqrt{3^4(1+3)} = \sqrt{3^4 \cdot 4} = 3^2 \cdot 2$.
10. $\boxed{D:}$ Din proporţie rezultă $2,25 \cdot 2x = 3 \cdot 6$, de unde $x = \frac{18}{4,5} = 4$.
11. $\boxed{B}$: Fie l lungimea laturii. Atunci diagonala este $l\sqrt{2} = 2\sqrt{3}$, de unde $l = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}$.
12. $\boxed{A}$: Avem $\operatorname{tg} 60^\circ - 2 \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Fie x pretul iniţial al aparatului de fotografiat. După ieftinire va costa $80\% \cdot x = \frac{4x}{5}$. După ce este iar scumpit va costa $120\% \cdot \frac{4x}{5} = \frac{24x}{25}$. Din

ecuaţia $\frac{24x}{25} = 1152$, deducem preţul iniţial

$$x = \frac{1152 \cdot 25}{24} = \boxed{1200}.$$

b. Preţul după ieftinire a fost $\frac{4x}{5} = \frac{4 \cdot 1200}{5} = \boxed{960}$.

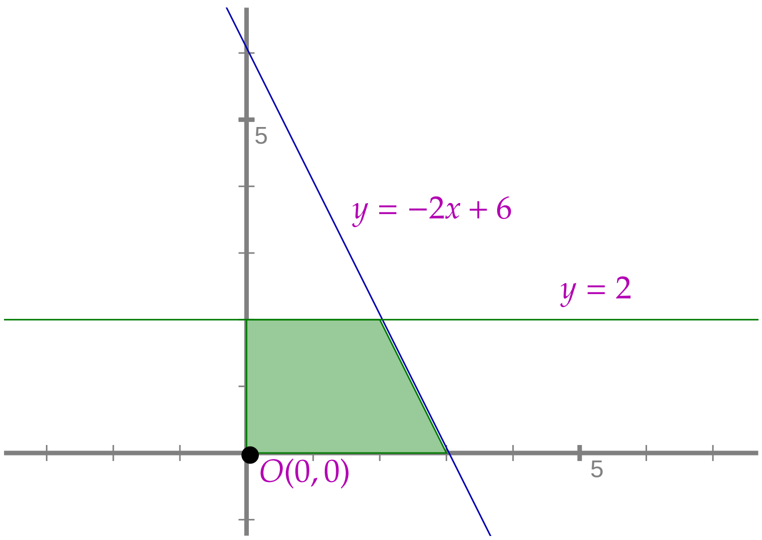

FIGURA 1. Exerciţiul 14.

14. a.
    b. Abscisa punctului de intersecţie al celor două drepte este soluţia ecuaţiei $-2x + 6 = 2$. Obţinem $x = 2$ Patrulaterul este un trapez cu baza mare 3, baza mică 2 şi înălţimea 2. Aria acestui trapez este deci

$$\frac{(2+3) \cdot 2}{2} = \boxed{5}$$

    c. Cum $f(3) = -2 \cdot 3 + 6 = 0$ produsul cerut va fi $\boxed{0}$.
15. a. Vezi pagina următoare.
    b. Fie O intersecţia diagonalelor bazei. In triunghiul dreptunghic VOM cu unghiul drept O, avem $VO = 8$, $OM = 6$. Conform teoremei lui Pitagora, $VM = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$. Dar VM este înălţime în triunghiul VBC, deci aria acestei feţe laterale este $\frac{12 \cdot 10}{2} = 60\text{cm}^2$. Aria laterală a piramidei este atunci

$$4 \cdot 60 = \boxed{240}$$

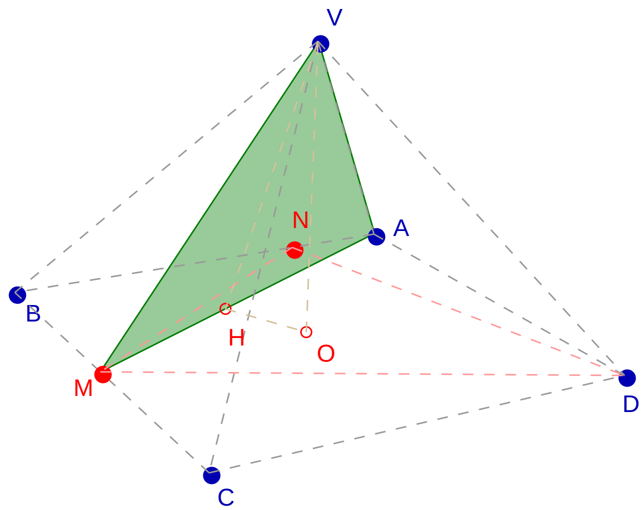

FIGURA 2. Exercițiul 15.

c. Din $12 = AB = AN + NB = AN + 3 \cdot AN = 4 \cdot AN$, avem $AN = 3$ şi imediat $NB = 12 - 3 = 9$. Calculăm succesiv

$$\begin{aligned} \text{Aria}_{\Delta ADN} &= \frac{AN \cdot AD}{2} = 18\text{cm}^2 \\ \text{Aria}_{\Delta NMB} &= \frac{BN \cdot MB}{2} = 27\text{cm}^2 \\ \text{Aria}_{\Delta DCM} &= \frac{CM \cdot DC}{2} = 36\text{cm}^2 \end{aligned}$$

Atunci

$$\begin{aligned} \text{Aria}_{\Delta DMN} &= \text{Aria}_{ABCD} - (\text{Aria}_{\Delta ADN} + \text{Aria}_{\Delta DCM} + \text{Aria}_{\Delta NMB}) \\ &= 144 - (18 + 27 + 36) = \boxed{63}\,\text{cm}^2 \end{aligned}$$

d. Fie H piciorul perpendicularei din O pe AM. Atunci VH este perpendiculară pe AM şi unghiul θ dintre planele (VAM) şi (ABC) este egal cu unghiul $\widehat{VHO}$.
Diin triunghiul dreptunghic AMB, avem $AM = \sqrt{6^2 + 12^2} = 6\sqrt{5}$. Triunghiurile OHM şi MAB fiind asemenea (dreptunghice cu $\widehat{OMH} = \widehat{MAB}$) avem $\frac{OH}{MB} = \frac{OM}{AM}$. De aici $OH = \frac{6}{\sqrt{5}}$. Atunci $\tan\theta = \frac{VO}{OH} = \frac{8\sqrt{5}}{6} = \boxed{\frac{4\sqrt{5}}{3}}$.

CAPITOLUL 5

Varianta 10

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $6+1=\boxed{7}$
2. $\boxed{5502}$
3. $x=6+2=\boxed{8}$
4. $ab=8\cdot 5=\boxed{40}$
5. $\boxed{-2}$
6. $6+4+6+4=\boxed{20}$
7. $3\cdot 4\cdot 5=\boxed{60}$
8. Aria laterală este $\pi RG=\pi\cdot 5\cdot 12=60\pi$, deci răspunsul este $\boxed{60}$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{B}$: Cum $1\cdot 2\cdot 3\ldots\cdot 50$ se divide cu 8 (apare între factori), restul lui a la împărţirea cu 8 este restul lui 17, adică 1.
10. $\boxed{D}$: Nici nu este nevoie să ştiţi să rezolvaţi un sistem. Este suficient să încercaţi pe rând cele 4 variante de răspuns, iar $(-2,2)$ este cea câştigătoare (propunătorul a vrut să vă dea mai mult de lucru şi a pus-o pe cea bună ultima!).
11. $\boxed{D}$: Făcând figura obţineţi o partiţie a triunghiului în 4 triunghiuri congruente, deci de arii egale. Aria triunghiului DEF este $\frac{96}{4}=24$.
12. $\boxed{B}$: Suma celor patru unghiuri $x, x+10°, x+20°, x+30°$ este $360°$ (nu reiese foarte clar din enunţ dar este singurul mod în care putem rezolva problema), deci avem $4x+60°=360°$. Rezolvând ecuaţia avem $x=\frac{300°}{4}=75°$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. $\frac{26}{74}=\boxed{\frac{13}{37}}$

b. Dacă am scoate doar 27 de bile, acestea pot fi câte 9 de fiecare culoare, deci nu putem fi siguri că avem 10 de aceeaşi culoare. Când o extragem însă pe a 28-a bilă una din cele trei culori va avea 10 bile scoase. Deci răspuns $\boxed{28}$.

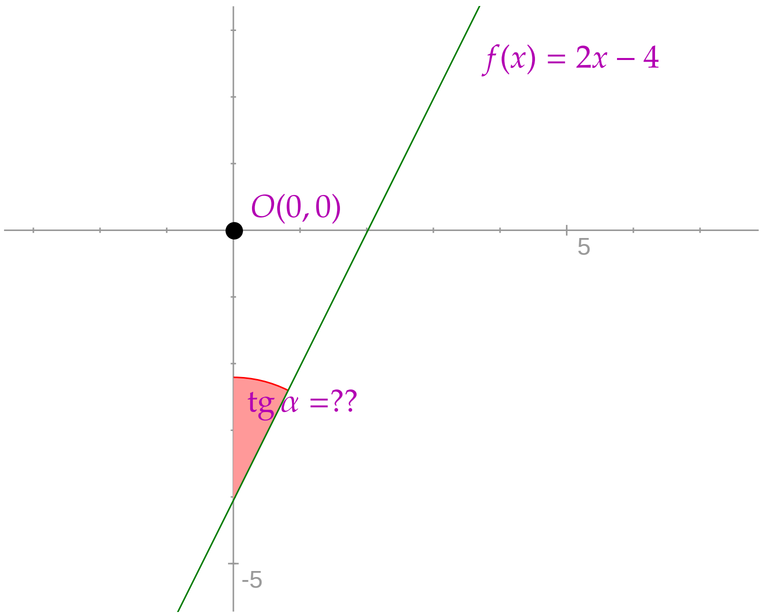

FIGURA 1. Exerciţiul 14.

14. a.
 b. Punctele de intersecţie cu axele sunt $(2, 0)$ şi $(0, -4)$. Atunci tangenta unghiului dorit este $\frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$.
 c. Avem $\frac{f(a)}{a+1} = 2 - \frac{6}{a+1}$. Atunci condiţia necesară şi suficientă este ca $a + 1$ să fie divizor al lui 6. Cum a este natural singurele posibilităţi sunt $a + 1 \in \{1, 2, 3, 6\}$, de unde $\boxed{a \in \{0, 1, 2, 5\}}$.

15. a.
 b. Feţele laterale au fiecare aria $6 \cdot 6\sqrt{2} = 36\sqrt{2}$. Baza are aria $(6\sqrt{2})^2 = 72$. Atunci aria totală este $4 \cdot 36\sqrt{2} + 2 \cdot 72 = \boxed{144\sqrt{2} + 144}$.
 c. Cum $[AF] = [CE]$, triunghiurile BEC, DEC, BFA şi DFA sunt toate congruente, deci $[BE] = [BF] = [DE] = [DF]$.
 d. Unghiul dintre plane este egal cu $\widehat{FDC}$. Cum din ipoteză $[CF] = [CD]$, triunghiul CDF este isoscel cu $\hat{D} = \hat{F}$. Atunci $\widehat{CDF} = \widehat{CFD} = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = \boxed{67.5^\circ}$.

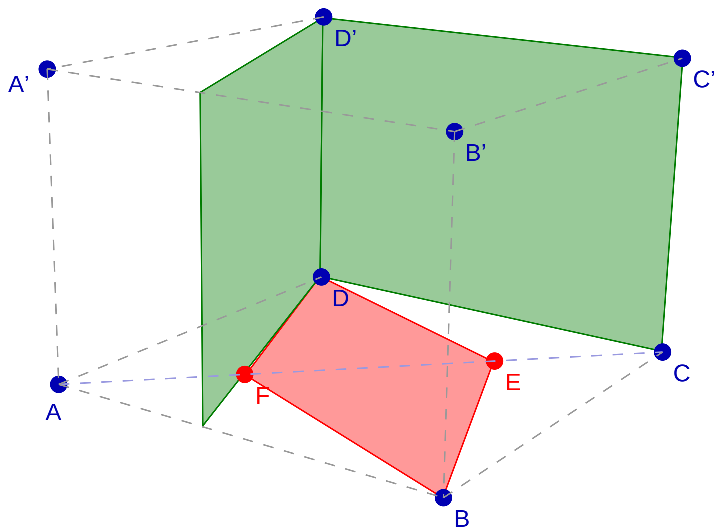

Figura 2. Exercițiul 15.