BAC 2007

Pro–Didactica

Testare Naţională

Rezolvările variantelor 41–45

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

Cuprins

CAPITOLUL 1

Varianta 41

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $4 + 2 \cdot 6 = 4 + 12 = \boxed{16}$
2. $\frac{7}{8} \cdot 3 = \boxed{\frac{21}{8}}$.
3. Elevul are de aşteptat $\boxed{20}$ de minute.
4. $\frac{20}{100} \cdot 1400 = \boxed{280}$.
5. Măsura unui unghi al unui dreptunghi este de $\boxed{90^\circ}$ (adică unghi drept).
6. **Comentariu:** *Nu ni se spune care sunt laturile egale ale triunghiului isoscel. Faptul ca o latură este numită bază nu implică faptul că celelalte două sunt egale. Ar fi fost atât de simplu să se scrie $AB = AC$. Vom presupune în cele ce urmează că $AB = AC$.*

   Înălţimea într-un triunghi isoscel este şi mediană, deci $BM = \frac{BC}{2} = \frac{10}{2} = \boxed{5}\ cm$.
7. $V_{con} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 10}{3} = \boxed{30}\pi\,\mathrm{cm}^3$.
8. $A_l = 3 \cdot A_{\text{unei feţe laterale}} = 3 \cdot 5 \cdot 5 = \boxed{75}\ cm^2$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{D}$: Putem avea 8 autoturisme şi o motocicletă. Arătăm că numărul autoturismelor nu poate fi mai mare decât 8. În cazul în care numărul autoturismelor ar fi mai mare sau egal cu 9 atunci am avea cel puţin $4 \cdot 9 = 36$ de roţi ceea ce contrazice ipoteza.
10. $\boxed{B}$: $\left(\frac{-1}{3}\right)^{30} : \left(\frac{-1}{3}\right)^{32} = \frac{1}{3^{30}} \cdot 3^{32} = 3^2 = 9$.
11. $\boxed{C}$: Fie triunghiul echilateral ABC circumscris cercului de centru O şi fie $M = AO \cap BC$. OM este rază în cercul de centru O şi cum centrul cercului este şi centrul de greutate al triunghiului avem că $OM = \frac{1}{3}AM$, de unde

$AM = 3 \cdot OM = 3 \cdot 4 = 12$. În triunghiul dreptunghic AMB avem $\sin 60^\circ = \dfrac{AM}{AB}$ ceea ce revine la $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{12}{AB}$, de unde $AB = \dfrac{2 \cdot 12}{\sqrt{3}} = \dfrac{24\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3}\ cm$.

12. $\boxed{C}$: **Prima rezolvare.** Fie D piciorul perpendicularei din B pe AC. În triunghiul dreptunghic ADB avem $\sin 60^\circ = \dfrac{BD}{AB}$ sau $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{BD}{6}$, de unde $BD = \dfrac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$. În acelaşi triunghi dreptunghic ADB avem $\cos 60^\circ = \dfrac{AD}{AB}$ sau $\dfrac{1}{2} = \dfrac{AD}{6}$, de unde $AD = 3$. Cum $AD = 3$ deducem $DC = AC - AD = 10 - 3 = 7$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul BDC obţinem: $BC = \sqrt{BD^2 + DC^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 7^2} = \sqrt{27 + 49} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$.

A doua rezolvare. Folosind teorema cosinus (numită şi teorema lui Pitagora generalizată) avem $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \dfrac{1}{2} = 76$. De aici, $BC = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. $N = \dfrac{4 + 3\sqrt{2}}{2} \in (4, 3\sqrt{2})$ este echivalent cu $4 < \dfrac{4 + 3\sqrt{2}}{2} < 3\sqrt{2}$ sau cu $8 < 4 + 3\sqrt{2} < 6\sqrt{2}$. Aratăm mai întâi că $8 < 4 + 3\sqrt{2}$. Aceasta este echivalent cu $8 - 4 < 3\sqrt{2}$ sau $4 < 3\sqrt{2}$. După ridicare la pătrat obţinem $16 < 18$ ceea ce este adevărat. Arătăm în continuare că $4 + 3\sqrt{2} < 6\sqrt{2}$. Acesta este echivalent cu $4 < 3\sqrt{2}$ sau cu $16 < 9 \cdot 2$ sau cu $16 < 18$, ceea ce este adevărat.

b. Căutăm un număr natural n cu proprietatea $4 < \sqrt{n} < 3\sqrt{2}$, inegalitate ce poate fi rescrisă $\sqrt{16} < \sqrt{n} < \sqrt{18}$, sau $16 < n < 18$. Singurul număr natural cu această proprietate este $\boxed{n = 17}$.

14. a. Ecuaţia $2x^2 - 5x + 3 = 0$ se rescrie $2x^2 - 2x - 3x + 3 = 0$ ceea ce este este echivalent cu $2x(x-1) - 3(x-1) = 0$ sau $(x-1)(2x-3) = 0$ de unde $x - 1 = 0$ sau $2x - 3 = 0$. Soluţiile ecuaţiei sunt: $x_1 = \boxed{1}$ sau $x_2 = \boxed{\dfrac{3}{2}}$.

b. Aducând la acelasi numitor ecuaţia $\dfrac{x+1}{x-2} + \dfrac{x-2}{x+1} + 2 = 0$ devine $(x+1)^2 + (x-2)^2 + 2(x-2)(x+1) = 0$, ceea ce este echivalent cu $x^2 + 2x + 1 + x^2 - 4x + 4 + 2x^2 + 2x - 4x - 4 = 0$. Reducând termenii asemenea obţinem $4x^2 - 4x + 1 = 0$ ceea ce se rescrie $(2x-1)^2 = 0$, de unde $x_1 = x_2 = \boxed{\dfrac{1}{2}}$.

c. Aducând la acelaşi numitor inecuaţia $\frac{x+2}{2} - \frac{x-3}{3} \geq 2$ devine $3x + 6 - 2x + 6 \geq 12$, ceea ce este echivalent cu $x \geq 0$, sau $x \in \boxed{[0, \infty)}$.

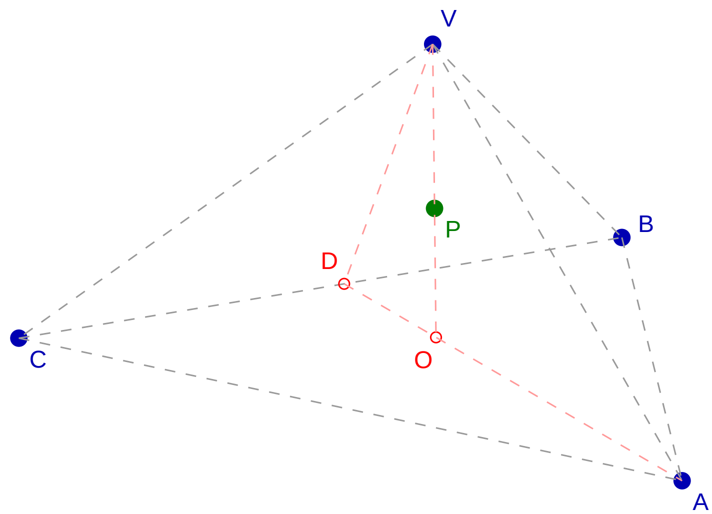

FIGURA 1. Exerciţiul 15.

15. a.

b. Fie VO înălţimea piramidei (punctul O este în planul (ABC)) şi fie $AO \cap BC = \{D\}$. AD este înălţime în triunghiul echilateral ABC de latură $6\sqrt{2}$ şi are lungimea $\frac{6\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{6}$. Cum O este şi centrul de greutate al triunghiului ABC, avem $AO = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$ (centrul de greutate al unui triunghi se găseşte la două treimi de vârful triunghiului). Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul AOV avem $VO = \sqrt{AV^2 - AO^2} = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{6})^2} = \sqrt{36 - 24} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Prin urmare, $V_{VABC} = \frac{1}{3} \cdot A_{ABC} \cdot VO = \frac{1}{3} \cdot \frac{AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ}{2} \cdot 2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 6\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{36}\,\text{cm}^3$.

c. Din $VB = VC$ avem că triunghiul VBC este isocel şi cum D este mijlocul lui BC rezultă că VD este mediană în triunghiul VBC. Mediana într-un triunghiu dreptunghic este şi înălţime, deci $VD \perp BC$. Din $BC \perp VD$, $BC \perp AD$ rezultă că $BC \perp (VAD)$ (dreapta perpendiculară pe două drepte concurente din plan, este perpendiculară pe plan), de unde avem că $BC \perp VA$ (dacă o dreaptă este perpendiculară pe un plan, atunci este perpendiculară pe orice dreaptă din plan).

d. PO reprezintă distanţa de la P la planul (ABC) şi conform ipotezei aceasta este egală cu distanţa de la P la (VAB), la (VAC) şi la (VBC). Avem următoarea egalitate $V_{VABC} = V_{PABC} + V_{PVAB} + V_{PVAC} + V_{PVBC} \quad (1)$. Avem $V_{PVAB} = V_{PVAC} = V_{PVBC}$ deoarece distanţa de la P la toate feţele piramidei este aceeaşi şi triunghiurile isocele VAB, VAC şi VBC sunt congruente. Deci relaţia (1) devine: $V_{VABC} = V_{PABC} + 3 \cdot V_{PVBC} \quad (2)$. Avem $V_{PABC} = \dfrac{PO}{3} \cdot A_{ABC} = \dfrac{PO}{3} \cdot \dfrac{AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ}{2} = \dfrac{PO}{3} \cdot \dfrac{6\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot \sin 60^\circ}{2} = PO \cdot 12 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \cdot PO$. De la punctul (b) avem $AD = 3\sqrt{6}$, de unde deducem că $OD = \dfrac{1}{3} \cdot 3\sqrt{6} = \sqrt{6}$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic VOD avem $VD = \sqrt{VO^2 + OD^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{6})^2} = \sqrt{12 + 6} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Deci $A_{VBC} = \dfrac{VD \cdot BC}{2} = \dfrac{3\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2}}{2} = 18$, iar $V_{PVBC} = \dfrac{PO}{3} \cdot 18 = 6PO$. Înlocuind în (2) obţinem: $36 = 6\sqrt{3} \cdot PO + 3 \cdot 6PO$ ceea ce este echivalent cu $36 = PO(6\sqrt{3} + 18)$, de unde $PO = \dfrac{36}{6(3 + \sqrt{3})} = \dfrac{6}{3 + \sqrt{3}} = \dfrac{6(3 - \sqrt{3})}{9 - 3} = \boxed{3 - \sqrt{3}}$.

CAPITOLUL 2

Varianta 42

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = \boxed{5}$
2. Soluţia ecuaţiei $x - 4 = 6$ este $x = 6 + 4 = \boxed{10}$.
3. Un pix costă $\frac{12}{4} = \boxed{3}$ lei.
4. Mai mare este numărul $a = \boxed{7,3}$.
5. Cum $1\,\mathrm{ha} = 10000\,\mathrm{m}^2$, rezultă că $2000\,m^2 = \boxed{0,2}\,\mathrm{ha}$.
6. Perimetrul dreptunghiului este $2 \cdot 20 + 2 \cdot 10 = 40 + 20 = \boxed{60}$ cm.
7. $V_{con} = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi 5^2 \cdot 6}{3} = \boxed{50}\pi\,\mathrm{cm}^3$.
8. Diagonala cubului este egală cu $\boxed{6\sqrt{3}}$ cm.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{C}$: Dacă 4 muncitori finalizează lucrarea în 12 ore, atunci un muncitor ar finaliza-o în $4 \cdot 12 = 48$ ore. Deci 3 muncitori o vor finaliza în $\frac{48}{3} = \boxed{16}$ ore.
10. $\boxed{B}$: Din $\frac{a}{2} = \frac{15}{b}$ avem că $ab = 2 \cdot 15 = 30$. Deci $N = ab - 20 = 30 - 20 = \boxed{10}$.
11. $\boxed{D}$: Fie O centrul cercului înscris în triunghiul ABC şi fie D piciorul perpendicularei din O pe AB. Cum centrul cercului înscris într-un triunghi se găseşte la intersecţia bisectoarelor triunghiului, rezultă că BO este bisectoarea unghiului $\hat{B}$ şi că $m(\widehat{DBO}) = 30°$. În triunghiul dreptunghic BDO avem $\tan\widehat{DBO} = \frac{DO}{BD}$, de unde $DO = BD \cdot \tan\widehat{DBO} = \frac{AB}{2} \cdot \tan 30° = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \boxed{\sqrt{3}}$ cm.
12. $\boxed{D}$: Lungimea laturii neparalele este egală cu $\frac{1}{3} \cdot 12 = 4$ cm. Cum linia mijlocie în trapez este egală cu semisuma bazelor, deducem că suma bazelor este de 2 ori lungimea liniei mijlocii, adică $2 \cdot 12 = 24\ cm$. Prin urmare, perimetrul trapezului isoscel este egal cu **suma lungimilor bazelor +2 (lungimea laturii neparalele)**$= 24 + 2 \cdot 4 = 24 + 8 = \boxed{32}$ cm.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Numărul total de bile din urnă este $4 + 8 = 12$. Probabilitatea ca bila extrasă să fie albă este egală cu $\frac{4}{12} = \boxed{\frac{1}{3}}$.

b. Dacă efectuăm cel mult 4 extrageri este posibil să obţinem la fiecare extragere câte o bilă albă deoarece avem 4 bile albe în urnă. În schimb efectuând 5 extrageri suntem siguri că cel putin una este roşie căci nu avem atâtea bile albe. Deci numărul minim de bile extrase pentru care să fim siguri că avem cel puţin o bilă roşie este $\boxed{5}$.

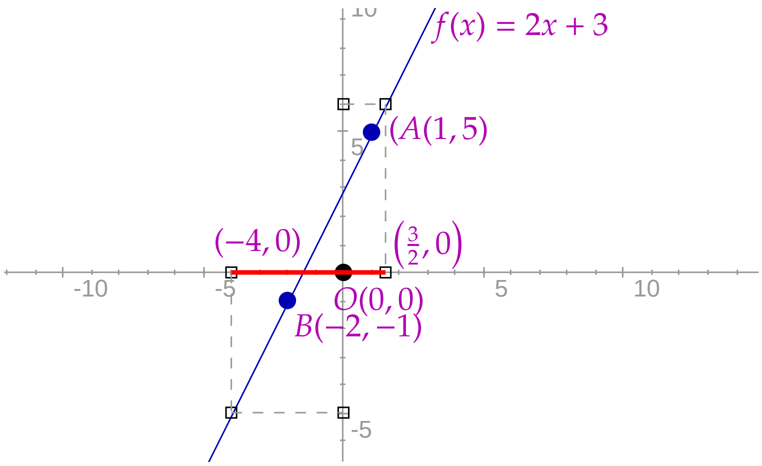

FIGURA 1. Exerciţiul 14.

14. a.

b. Din faptul că $A(1,5)$ aparţine graficului funcţiei f avem $f(1) = 5$, sau $a + b = 5 \quad (1)$.
Similar, faptul că $B(-2,-1)$ aparţine graficului funcţiei f conduce la $f(-2) = -1$, sau $-2a + b = -1 \quad (2)$.
Din (1) avem $b = 5 - a$ şi înlocuind în (2) obţinem $-2a + 5 - a = -1$, de unde $a = \frac{6}{3} = \boxed{2}$, iar $b = 5 - 2 = \boxed{3}$.

c. Pentru $a = 2$ şi $b = 3$, avem $f(x) = 2x + 3$. Condiţia $f(x) \in [-5, 6]$ este echivalentă cu $-5 \le 2x + 3 \le 6$, sau $-8 = -5 - 3 \le 2x \le 6 - 3 = 3$, de unde $-4 \le x \le \frac{3}{2}$, adică $x \in \boxed{\left[-4, \frac{3}{2}\right]}$.

15. a.

b. Fie O, respectiv O', centrul bazei mari, respectiv centrul bazei mici. Atunci OO' este înălţimea trunchiului de piramidă şi fie M proiecţia lui A' pe planul $(ABCD)$. Avem $M \in AC$. Diagonala AC a pătratului $ABCD$ este egală cu $12\sqrt{2}$ cm. În triunghiul dreptunghic $A'MA$ avem $\tan \widehat{A'AM} =$

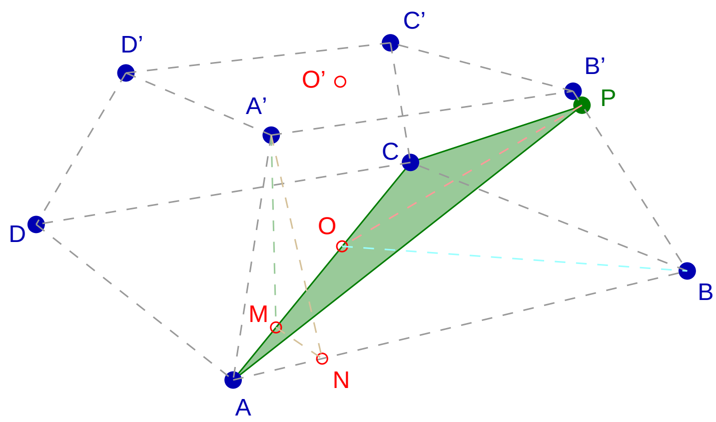

FIGURA 2. Exerciţiul 15.

$\frac{A'M}{AM}$, de unde $A'M = \tan\widehat{A'AM}\cdot AM = \frac{3}{2}\cdot\frac{AC - A'C'}{2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{12\sqrt{2} - 8\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{4\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ cm. Deci $OO' = A'M = 3\sqrt{2}$ cm.

c. Cum diagonala $A'C'$ a pătratului $A'B'C'D'$ este egală cu $8\sqrt{2}$ cm rezultă că latura $A'B'$ are lungimea 8 cm.
Fie N proiecţia lui M pe AB. Din $A'M \perp (ABCD)$, $MN \perp AB$ şi $AB \subset (ABCD)$, conform teoremei celor trei perpendiculare rezultă că $A'N \perp AB$, deci $A'N$ este înălţimea trapezului $ABB'A'$.
Prin aplicarea teoremei lui Pitagora în triunghiul $A'MA$ aflăm $AA' = \sqrt{AM^2 + A'M^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{8+18} = \sqrt{26}$. În triunghiul dreptunghic ANM, $m(\widehat{MAN}) = 45^\circ$ şi avem $\cos\widehat{MAN} = \frac{AN}{AM}$, de unde $AN = AM \cdot \cos\widehat{MAN} = 2\sqrt{2}\cdot\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\sqrt{2} = 2$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic ANA', avem $A'N = \sqrt{AA'^2 - AN^2} = \sqrt{(\sqrt{26})^2 - 2^2} = \sqrt{26-4} = \sqrt{22}$.
Atunci $A_l = 4 \cdot A_{ABB'A'} = 4 \cdot \frac{(AB + A'B')\cdot A'N}{2} = 2\cdot(12+8)\cdot\sqrt{22} = \boxed{40\sqrt{22}}\,\text{cm}^2$.

d. Din $AB = BC$, PB latură comună şi $\widehat{PBA} = \widehat{PBC}$ rezultă că triunghiurile APB şi BCP sunt congruente (cazul de congruenţa latură-unghi-latură). Avem deci $AP = PC$ de unde deducem că triunghiul APC este isocel. Cum O este mijlocul lui AC şi mediana într-un triunghi dreptunghic este şi înălţime rezultă că PO este înălţime în triunghiul APC. Prin urmare, $A_{APC} = \frac{PO\cdot AC}{2} = \frac{PO\cdot 12}{2} = 6PO$ este minimă când PO este minimă, adică atunci când $PO \perp BB'$. În triunghiul dreptunghic OPB cunoştem valoarea tangentei unghiului $\widehat{PBO}$ ca fiind egală cu $\frac{3}{2}$, deci $\tan \widehat{PBO} = \frac{OP}{PB}$, de unde $OP = \frac{3}{2} \cdot PB$. Conform teoremei lui Pitagora, în triunghiul dreptunghic OPB avem $OB^2 = OP^2 + PB^2$ ceea ce este echivalent cu $(6\sqrt{2})^2 = \left(\frac{3PB}{2}\right)^2 + PB^2$ sau $36 \cdot 2 = PB^2\left(\frac{9}{4} + 1\right)$, de unde $PB^2 = \frac{36 \cdot 2}{\frac{13}{4}} = \frac{36 \cdot 2 \cdot 4}{13}$ sau $PB = \sqrt{\frac{36 \cdot 2 \cdot 4}{13}} = 6 \cdot 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{13}} = \boxed{\frac{12\sqrt{26}}{13}}$.

Atenţie! Datele problemei sunt de aşa natură încât punctul proiecţia punctului O pe dreapta BB' este situată în interiorul segmentului $[BB']$, iar minimul căutat se atinge pentru acest punct. Dacă proiecţia cade în afara muchiei, atunci minimul se atinge într-unul dintre vârfuri!!!

CAPITOLUL 3

Varianta 43

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $3^2 = \boxed{9}$
2. Toţi divizorii naturali ai lui 8 sunt $1, 2, 4, 8$. Alegeţi-l pe cel care vă place.
3. $\frac{10}{100} \cdot 40 = \boxed{4}$.
4. Mai mic este numărul $\boxed{b = \frac{2}{5}}$.
5. Ştim că 1 decalitru este egal cu 10 litri, deci 3 decalitri sunt egali cu $\boxed{30}$ litri.
6. Perimetrul triunghiul echilateral de latură 5 cm este egal cu $5+5+5 = \boxed{15}$ cm.
7. $V_{\text{prismă}} = A_{\text{bazei}} \cdot h = 4^2 \cdot 10 = 16 \cdot 10 = \boxed{160}\,\text{cm}^3$.
8. $A_l = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 3 \cdot 5 = \boxed{15}\pi\,\text{cm}^2$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{D}$: Ecuaţia $3x^2 + x - 4 = 0$ este echivalentă cu $(3x^2 - 3) + (x - 1) = 0$ sau cu $3(x^2 - 1) + (x - 1) = 0$. Folosind faptul că $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ şi dând factor comun $x - 1$ obţinem $(x - 1)(3x + 3 + 1) = 0$, de unde $x - 1 = 0$ sau $3x + 4 = 0$.

   Soluţiile ecuaţie sunt atunci $x_1 = \boxed{1}$ şi $x_2 = \boxed{\frac{-4}{3}}$.
10. $\boxed{D}$: Elementele mulţimii M sunt toate numerele între 10 şi 99, care sunt $99 - 9 = 90$ la număr, din care se exclud numerele de două cifre egale: $11, 22, 33, \ldots, 99$ care sunt 9 la număr. Deci avem $90 - 9 = \boxed{81}$ elemente în M.
11. **Comentariu:** Textul este cam confuz. Bănuim că prin înălţimea rombului propunătorul înţelege distanţa dintre două laturi paralele. Sau altfel spus, privim rombul ca un paralelogram ce este în particular şi considerăm una din laturi ca bază.

    $\boxed{B}$: Fie h înălţimea rombului. Calculăm aria rombului în două moduri. Mai întâi, împărţind rombul în două triunghiuri, avem aria $2 \cdot \frac{16 \cdot 16 \sin 30^\circ}{2} = 128$. Apoi, privind rombul drept paralelogram, aria este $16 \cdot h$. Din $128 = 16 \cdot h$, deducem $h = \frac{128}{16} = \boxed{8}$.

12. $\boxed{B}$: Toate unghiurile lui $ARBS$ corespund unor diametre ale cercului, deci sunt unghiuri drepte. Patrulaterul este deci dreptunghi.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Faptul că numerele naturale a, b şi c sunt direct proporţionale cu 1, 2 şi 5, revine la $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{5}$, de unde rezultă că $\frac{a}{c} = \boxed{\frac{1}{5}}$.

b. Cum media aritmetică a numerelor a, b şi c este egală cu 16, avem relaţia $\frac{a+b+c}{3} = 16$, de unde $a+b+c = 3 \cdot 16 = 48$. Făcând proporţii derivate avem $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{1+2+5} = \frac{48}{8} = 6$. De aici $a = 6$, $b = 2 \cdot 6 = 12$, $c = 5 \cdot 6 = 30$. Cel mai mare divizor comun al numerelor 6, 12 şi 30 este $d = 6$. Avem deci de aflat $k \in \mathbb{N}$ pentru care $2^k < 6 < 2^{k+1}$, de unde $k = \boxed{2}$.

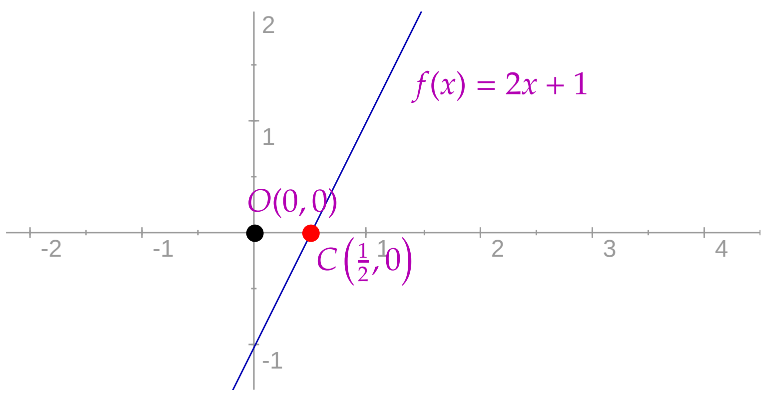

FIGURA 1. Exerciţiul 14.

14. a.

b. Dacă $C(|a|, 2a+1)$ aparţine reprezentării grafice a funcţiei f avem $f(|a|) = 2a+1$. Aceasta revine la $2|a| - 1 = 2a + 1$. Pentru $a > 0$, $|a| = a$ şi ecuaţia devine $2a - 1 = 2a + 1$, sau $-1 = 1$. Ecuaţie imposibilă.
Pentru $a \leq 0$, $|a| = -a$ şi ecuaţia devine $-2a - 1 = 2a + 1$, echivalent cu $-2a - 2a = 1 + 1$, sau $-4a = 2$, de unde $a = \frac{2}{-4} = \boxed{-\frac{1}{2}}$.

c. Pentru a calcula s folsim egalitatea $1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Prin urmare, $s = f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2007) = (2\cdot1-1)+(2\cdot2-1)+(2\cdot3-1)+...+(2\cdot2007-1) = 2(1+2+3+...+2007) - \underbrace{(1+1+1+...+1)}_{2007-ori} = 2 \cdot \frac{2007 \cdot 2008}{2} - 2007 =$

$2007 \cdot 2008 - 2007 = 2007(2008 - 1) = 2007 \cdot 2007 = 2007^2$ care este pătrat perfect.

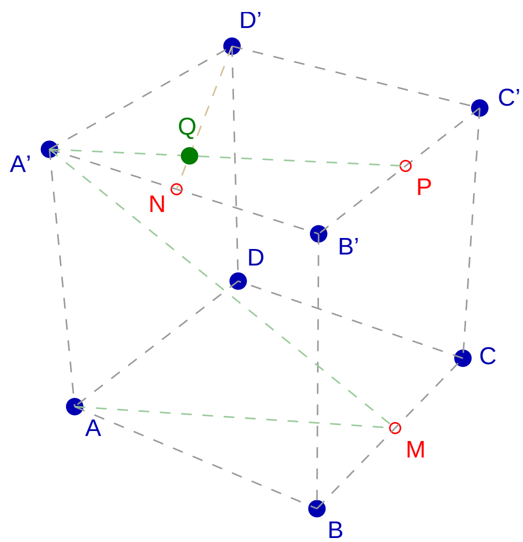

FIGURA 2. Exerciţiul 15.

15. a.

b. Fie a lungimea laturii cubului. În triunghiul dreptunghic ABM aplicând teorema lui Pitagora avem $AM = \sqrt{AB^2 + BM^2}$ sau $AM = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Aplicând din nou teorema lui Pitagora, de data aceasta în triunghiul dreptunghic $A'AM$ avem $A'M^2 = AA'^2 + AM^2$, ceea ce este echivalent cu $9^2 = a^2 + \frac{5a^2}{4}$, sau $81 = a^2 \cdot \frac{9}{4}$, de unde $a = \sqrt{\frac{81 \cdot 4}{9}} = \frac{9 \cdot 2}{3} = 6$ cm.

c. Muchiile piramidei triunghiulare $A'C'BD$ sunt toate congruente, deoarece sunt diagonale ale feţelor cubului şi au lungimea $6\sqrt{2}$ cm. Cum $A'B = BD = A'D = 6\sqrt{2}$ rezultă că triunghiul $A'BD$ este echilateral şi $A_{A'BD} = \frac{A'B \cdot A'D \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{6\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 18\sqrt{3}$. Dacă P este proiecţia lui C' pe planul $(A'BD)$ avem $V_{A'C'BD} = \frac{1}{3} \cdot A_{A'BD} \cdot C'P = \frac{1}{3} \cdot 18\sqrt{3} \cdot C'P = 6\sqrt{3} \cdot C'P$. Cum tetraedrul $A'C'BD$ este regulat, punctul P este şi centrul de greutate al triunghiului $A'BD$. Înălţimea triunghiului echilateral $A'BD$ de latură $6\sqrt{2}$ este egală cu $\frac{6\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{6}$, iar $BP = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$ (centrul de greutate al unui triunghi se află la $\frac{2}{3}$ de vârful triunghiului).

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic BPC' avem $C'P = \sqrt{BC'^2 - BP^2} = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{6})^2} = \sqrt{36 \cdot 2 - 4 \cdot 6} = \sqrt{6(12-4)} = \sqrt{48}$.
Prin urmare, $V_{A'C'BD} = 6\sqrt{3} \cdot C'P = 6\sqrt{3} \cdot \sqrt{48} = 6\sqrt{3 \cdot 3 \cdot 16} = 6 \cdot 3 \cdot 4 = \boxed{72}\,\text{cm}^3$.

A doua soluţie. Cubul este compus din piramida $A'C'BD$ precum şi patru piramide cu unul dintre vârfuri în A, C, B' respectiv D'. Fiecare din aceste piramide au câte trei muchii comune cu cubul dat, deci volumul fiecăreia este $\frac{a^3}{6}$. Prin urmare volumul piramidei din enunţ este

$$V_{A'C'BD} = a^3 - 4\frac{a^3}{6} = \frac{a^3}{3} = \boxed{72}\,\text{cm}^2.$$

d. Cum $AA' \perp (A'B'C'D')$ şi $D'N \in (A'B'C'D')$ rezultă că $AA' \perp D'N$. Fie P mijlocul lui $B'C'$ şi fie $A'P \cap D'N = Q$. Din $A'B' = A'D'$ şi $A'N = B'P$ rezultă că triunghiurile dreptunghice $A'B'P$ şi $D'A'N$ sunt congruente (cazul de congruenţa catetă-catetă). De aici rezultă că $\widehat{A'PB'} = \widehat{A'ND'}$ şi cum $\widehat{A'PB'} + \widehat{PA'B'} = 90^\circ$ deducem că $\widehat{A'ND'} + \widehat{PA'B'} = 90^\circ$, de unde avem că triunghiul $A'QN$ este dreptunghic. Din $m(\widehat{A'QN}) = 90^\circ$ rezultă că $A'P \perp ND'$ şi cum $A'P \| AM$ avem că $D'N \perp AM$. Din $D'N \perp AM$ şi $D'N \perp AA'$, deducem $D'N \perp (A'AM)$ (dreaptă perpendiculară pe două drepte concurente din planul $(A'AM)$).

CAPITOLUL 4

Varianta 44

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. 36 descompus în factori primi este egal cu $\boxed{2^2 \cdot 3^2}$.
2. Ecuaţia $2x + 1 = 3$ este echivalentă cu $2x = 3 - 1$, sau $2x = 2$, de unde $x = \frac{2}{2} = \boxed{1}$.
3. Cum $3 = \sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{16} = 4$, cel mai mare număr natural mai mic decât $\sqrt{10}$ este $\boxed{3}$.
4. $f(-1) = -2 \cdot (-1) + 3 = 2 + 3 = \boxed{5}$.
5. Lungimea diagonalei dreptunghiului care are laturile de 30 cm şi 40 cm se află prin aplicarea teoremei lui Pitagora în triunghiul dreptunghic format de o diagonală cu laturile dreptunghiului şi este egală cu $\sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{900 + 1600} = \sqrt{2500} = \boxed{50}$ cm.
6. Perimetrul paralelogramului este egal cu $2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 4 + 8 = \boxed{12}$ cm.
7. $A_t = 6 \cdot A_{\text{feţe}} = 6 \cdot 10^2 = 6 \cdot 100 = \boxed{600}\ cm^2$.
8. $V_{\text{sferă}} = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi 3^3}{3} = 4\pi 3^2 = \boxed{36}\pi\ cm^3$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{C}$: Din $\frac{x}{3} = \frac{4}{y}$ rezultă $xy = 3 \cdot 4 = 12$. Deci $n = 2xy - 10 = 2 \cdot 12 - 10 = 24 - 10 = 14$.
10. $\boxed{B}$: $\frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 25} = \frac{(x-5)^2}{(x-5)(x+5)} = \frac{x-5}{x+5}$.
11. $\boxed{A}$: $MB = \frac{AB}{2} = \frac{7}{2}$, iar $BN = \frac{BC}{2} = \frac{9}{2}$, de unde $MN = MB + BN = \frac{7}{2} + \frac{9}{2} = \frac{7+9}{2} = \frac{16}{2} = 8$.
12. $\boxed{C}$: Simetricul punctului $A(-3, 2)$ faţă de axa Oy este punctul $A'(3, 2)$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Fie p preţul iniţial. După scumpirea cu 10% preţul devine $p_1 = p + \frac{10}{100} \cdot p = p + \frac{1}{10} \cdot p = \frac{11}{10} \cdot p$. După ieftinirea cu 10%, preţul ajunge $p_1 - \frac{10}{100} p_1 = p_1 - \frac{1}{10} p_1 = \frac{9}{10} p_1 = \frac{9}{10} \cdot \frac{11}{10} \cdot p = \frac{99}{100} \cdot p$ care conform ipotezei este egal cu $247,5$ lei. Avem deci relaţia $\frac{99}{100} \cdot p = 247,5$, de unde $p = \frac{247,5 \cdot 100}{99} = \frac{24750}{99} = \frac{2750}{11} = \boxed{250}$ lei.

b. Preţul produsului s-a micşorat cu $\frac{250 - 247,5}{250} = 0,01 = \boxed{1\%}$.

14. a. $(14, 4)$ este soluţia pentru $3x + 2y = 50$ dacă şi numai dacă $(14, 4)$ verifică ecuaţia, adică $3 \cdot 14 + 2 \cdot 4 = 50$, sau $42 + 8 = 50$, ceea ce este adevărat.

b. Aducem prima ecuaţie la o formă mai simplă. Avem $(x-2)^2 + (y+4)^2 = (x+2)(x-2) + y^2 \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 8y + 16) = x^2 - 4 + y^2 \Leftrightarrow -4x + 24 + 8y = 0 \Leftrightarrow -x + 2y + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2y + 6$. Substituind în a doua ecuaţie avem $3(2y+6) + 2y = 50 \Leftrightarrow 8y = 32 \Leftrightarrow y = \frac{32}{8} = \boxed{4}$. Revenind, $x = 2y + 6 = 2 \cdot 4 + 6 = \boxed{14}$.

c. Inecuaţia $2x + 2 \leq \sqrt{5}x + \sqrt{5}$ se rescrie $x(2 - \sqrt{5}) + (2 - \sqrt{5}) \leq 0$ sau $(2 - \sqrt{5})(x+1) \leq 0$. Cum $2 - \sqrt{5} < 0$ rezultă că $x + 1 \geq 0$ echivalent cu $x \geq -1$ sau $x \in \boxed{[-1, -\infty)}$.

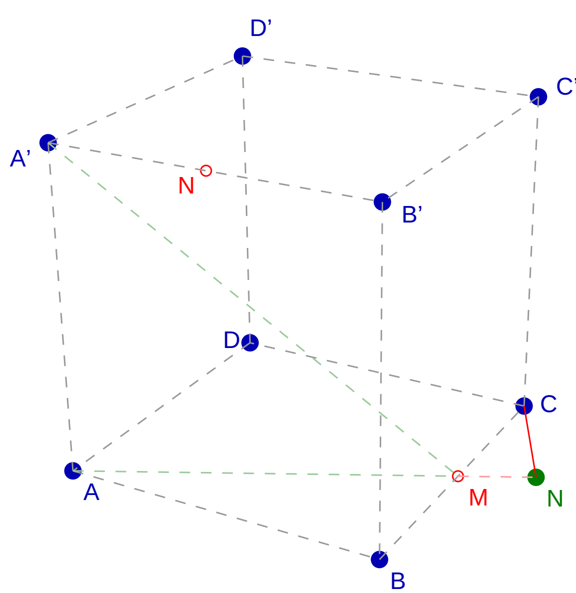

FIGURA 1. Exerciţiul 15.

15. a.

b. Fie a lungimea laturii cubului. În triunghiul dreptunghic ABM aplicând teorema lui Pitagora avem $AM = \sqrt{AB^2 + BM^2}$ sau $AM = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Aplicând din nou teorema lui Pitagora, de data aceasta în triunghiul dreptunghic $A'AM$ avem $A'M^2 = AA'^2 + AM^2$, ceea ce este echivalent cu $12^2 = a^2 + \frac{5a^2}{4}$, sau cu $144 = a^2 \cdot \frac{9}{4}$, de unde $a = \sqrt{\frac{144 \cdot 4}{9}} = \frac{12 \cdot 2}{3} = \frac{24}{3} = 8\ cm$.

c. Proiecţia lui D' pe planul $(ABCD)$ este punctul D. Deci unghiul dintre BD' şi planul (ABC) este unghiul $\widehat{DBD'}$. În triunghiul dreptunghic BDD' avem $\tan\widehat{DBD'} = \frac{DD'}{BD} = \frac{8}{8\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

d. Fie N proiecţia lui C pe AM. Cum $AA' \perp (ABCD)$ şi $CN \in (ABCD)$, rezultă că $AA' \perp CN$. Din $CN \perp AA'$ şi $CN \perp AM$ avem că $CN \perp (AMA')$. Deci distanţa de la C' la planul $(A'AM)$ este CN. Din $\widehat{AMB} = \widehat{CMN}$ (unghiuri opuse la vârf) şi $m(\widehat{ABM}) = m(\widehat{CNM}) = 90°$ rezultă că triunghiul ΔABM este asemenea cu ΔCNM, de unde avem că $\frac{CN}{AB} = \frac{CM}{AM}$ (1). De la punctul (b) ştim $AM = \frac{8\sqrt{5}}{2} = 4\sqrt{5}$ şi înlocuind în (1) obţinem $\frac{CN}{8} = \frac{4}{4\sqrt{5}}$, de unde $CN = \frac{8}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{8\sqrt{5}}{5}}$.

CAPITOLUL 5

Varianta 45

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $765 - 432 = \boxed{333}$
2. Cel mai mic număr impar din două cifre este $\boxed{13}$.
3. $4567 = 1141 \cdot 4 + 3$, deci restul împărţirii la 4 este $\boxed{3}$.
4. Soluţia ecuaţiei $x^2 = 0$ este $x = \boxed{0}$.
5. $2,25 = \frac{225}{100} = \frac{45}{20} = \boxed{\frac{9}{4}}$
6. Perimetrul dreptunghiului cu laturile de lungimi $7\ cm$ şi $4\ cm$ este egal cu $2 \cdot 7 + 2 \cdot 4 = 14 + 8 = \boxed{22}\ cm$.
7. $V_{cilindru} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 36 \cdot 8\pi = \boxed{288}\pi\ cm^3$.
8. Diagonala cubului cu muchia de lungime $2\ cm$ este egală cu $\boxed{2\sqrt{3}}\ cm$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{C}$: $f(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5$
10. $\boxed{D}$: $(x-4)(x+4) = x^2 - 4^2 = x^2 - 16$
11. $\boxed{B}$: Avem $AB = AC - BC = 11 - 1 = 10\ cm$, de unde $MB = \frac{AB}{2} = \frac{10}{2} = 5\ cm$. Prin urmare $MC = MB + BC = 5 + 1 = 6\ cm$
12. $\boxed{C}$: $\frac{\sin 30° \cdot \cos 60°}{\tan 45°} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{4}$

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Fie p preţul iniţial al produsului. Dup a prima scumpire cu 10% preţul devine $p_1 = p + \frac{10}{100} \cdot p = p(1 + \frac{1}{10}) = \frac{11}{10} \cdot p$. După a două scumpire cu 10% preţul devine $p_1 + \frac{10}{100} \cdot p_1 = p_1(1 + \frac{1}{10}) = \frac{11}{10}p_1 = \frac{11}{10} \cdot \frac{11}{10}p = \frac{121}{100}p$.

Conform ipotezei după cele două scumpirii preţul ajunge la $13,31$ lei, adică $\frac{121}{100}p = 13,31$, de unde $p = \frac{100 \cdot 13,31}{121} = \frac{1331}{121} = \boxed{11}$ lei.

b. După cele două scumpiri preţul iniţial s-a mărit cu $\frac{13,31 - 11}{11} = \frac{2,31}{11} = 0,21 = \boxed{21\%}$.

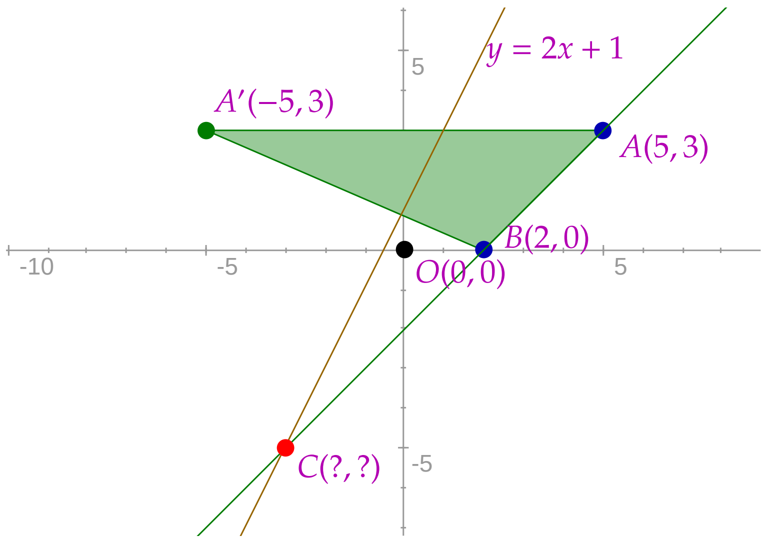

FIGURA 1. Exerciţiul 14.

14. a.

b. Simetricul punctului $A(5,3)$ faţa de axa Oy este punctul $A'(-5,3)$. Fie P piciorul perpendicularei din B pe AA'. Atunci $\text{Aria}_{\Delta ABA'} = \frac{AA' \cdot BP}{2} = \frac{10 \cdot 3}{2} = \boxed{15}$.

c. Fie $y = ax + b$ dreapta determinată de punctele $A(5,3)$ şi $B(2,0)$. Avem $5a + b = 3 \quad (1)$ şi $2a + b = 0 \quad (2)$. Din (2) deducem $b = -2a$ şi înlocuind în (1) obţinem $5a - 2a = 3$ sau $3a = 3$, de unde $a = 1$, ceea ce dă $b = -2$. Deci dreapta determinată de punctele A şi B este dreapta AB de ecuaţie $y = x - 2$. Cum punctele A, B şi C sunt coliniare, punctul C verifică ecuaţia dreptei AB, adică $2m + 1 = m - 2$ sau $\boxed{m = -3}$.

15. a.

b. Din $AA' \perp (ABCD)$, $AB \perp BC$ şi $BC \subset (ABCD)$ rezultă conform teoremei celor trei perpendiculare că $A'B \perp BC$.

c. În triunghiul dreptunghic $A'BC$ aplicând teorema lui Pitagora avem $BC = \sqrt{A'C^2 - A'B^2} = \sqrt{9^2 - 6^2} = 3\sqrt{5}$.

În triunghiul dreptunghic $A'AD$ aplicând teorema lui Pitagora avem: $AA' = \sqrt{A'D^2 - AD^2} = \sqrt{7^2 - (3\sqrt{5})^2} = 2$.

Aplicând din nou teorema lui Pitagora, de data aceasta în triunghiul $A'AB$ avem $AB = \sqrt{A'B^2 - A'A^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$.

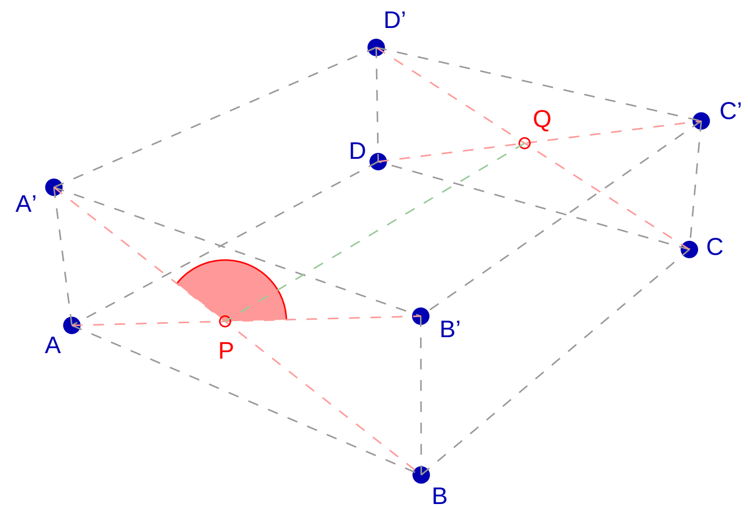

FIGURA 2. Exercițiul 15. Notațiile celei de a doua soluții de la (d) NU sunt cele din figură.

Prin urmare $V_{ABCDA'B'C'D'} = A_{ABCD} \cdot AA' = 4\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot 2 = \boxed{24\sqrt{10}}\ cm^3$.

d. Fie P intersecția dreptelor $A'B$ și AB', iar Q intersecția dreptelor CD' și $C'D$. Planul $(A'BC)$ este de fapt planul $(A'D'CB)$, iar planul $(B'AD)$ este planul $(B'C'DA)$. Intersecția acestor plane este dreapta PQ care este linie mijlocie în fiecare din dreptunghiurile $A'D'CB$ și $B'C'DA$, deci este paralelă de exemplu cu BC. De aici $PQ \perp (A'B'BA)$, deci $PQ \perp A'P$ și $PQ \perp B'P$. Astfel unghiul dintre planele în discuție este $A'PB'$.
Aria triunghiului $A'PB'$ este un sfert din aria dreptunghiului $A'B'BA$, adică $\frac{4\sqrt{2} \cdot 2}{4} = 2\sqrt{2}$. Dar pe de altă parte aria acestui triunghi poate fi exprimată și sub forma

$$\frac{A'P \cdot B'P \cdot \sin \widehat{A'PB'}}{2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot \sin \widehat{A'PB'}}{2}$$

Deci $\sin \widehat{A'PB'} = \boxed{\frac{4\sqrt{2}}{9}}$.

A doua soluție Fie $P = A'C \cap B'D$ și $Q = A'B \cap B'A$. Cum Q este intersecția diagonalelor dreptunghiului $ABB'A'$, Q este mijlocul lui AB' și $A'C$. P fiind intersecția diagonalelor cubului, este mijlocul lui $A'C$ și $B'D$. Deci PQ este linie mijlocie în triunghiul $A'BC$ și deci $PQ || BC$. Din $PQ || BC$ și $A'B \perp BC$ rezultă că $A'Q \perp PQ$. Similar, PQ este linie mijlocie și în triunghiul $AB'D$, de unde avem $PQ || AD$. Cum $PQ || AD$ și $AB' \perp AD$ rezultă că $B'A \perp PQ$. Din $PQ = (ADB') \cap (A'BC)$, $A'B \perp PQ$ și $B'A \perp BQ$, avem că unghiul planelor $(A'BC)$ și $(B'AD)$ este unghiul $\widehat{A'QB'}$. Vom calcula sinusul lui $\widehat{A'QB'}$ prin exprimarea ariei triunghiului $A'QB'$ în două moduri. Triunghiul $A'QB'$ este isocel deoarece $A'Q = B'Q = \frac{AB'}{2} = \frac{A'B}{2} = 3$. Înălţimea triunghiului $A'QB'$ este egală cu $\frac{AA'}{2} = \frac{2}{2} = 1$. Prin urmare, $A_{A'QB'} = \frac{A'Q \cdot B'Q \cdot \sin \widehat{A'QB'}}{2} = \frac{A'B' \cdot h}{2}$ (unde h este înălţimea triunghiului), ceea ce este echivalent cu $A'Q \cdot B'Q \cdot \sin \widehat{A'QB'} = A'B' \cdot h$ sau cu $3 \cdot 3 \cdot \sin \widehat{A'QB'} = 4\sqrt{2}$. Deci, $\sin \widehat{A'QB'} = \boxed{\frac{4\sqrt{2}}{9}}$