BAC 2007

Pro–Didactica

Testare Naţională

Rezolvările variantelor 36–40

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

Cuprins

CAPITOLUL 1

Varianta 36

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $1,28 + 15,22 = \boxed{16,5}$
2. $x + 7 = 3$ este echivalentă cu $x = 3 - 7$ sau $x = \boxed{-4}$
3. Preţul unui kilogram de rosii este egal cu $\frac{700}{350} = \boxed{2}$ lei.
4. 80% din 35,km este egal cu $\frac{80}{100} \cdot 35 = \frac{4}{5} \cdot 35 = \boxed{28}$ km.
5. Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este $\boxed{360^\circ}$.
6. Perimetrul dreptunghiului este $2L + 2l = 2 \cdot 8 + 2 \cdot 6 = 16 + 8 = \boxed{24}\ cm$.
7. Cubul are 6 feţe de arie egaluă. Deci $A_{\text{feţe}} = \frac{A_t}{6} = \frac{150}{6} = \boxed{25}\ cm^2$.
8. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic format de o muchie laterală şi diagonala bazei paralelipipedului avem lungimea diagonalei paralelipipedului egală cu
$$\sqrt{2^2 + 3^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 9 + 12} = \sqrt{25} = \boxed{5}\ cm$$

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{D}$: $|2 - \sqrt{5}| - (2 + \sqrt{5}) = \sqrt{5} - 2 - 2 - \sqrt{5} = -4$. Am folosit faptul că $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$, pentru $|2 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2$.
10. $\boxed{B}$: Introducând sub radical avem $A = \{\sqrt{20}, \sqrt{16}, \sqrt{18}\}$. Deci ordinea crescătoare a elementelor mulţimii A este: $\sqrt{16}, \sqrt{18}, \sqrt{20}$ sau $4, 3\sqrt{2}, 2\sqrt{5}$.
11. $\boxed{C}$: Triunghiul dreptunghic isocel înscris într-un cerc are ipotenuza egală cu diametrul cercului, iar înălţimea egală cu raza cercului, deci aria triunghiului este egală cu $\frac{12 \cdot 6}{2} = 36\ cm^2$.
12. $\boxed{B}$: În triunghiul dreptunghic MAN aplicând teorema lui Pitagora avem: $NA = \sqrt{MN^2 - MA^2} = \sqrt{(3\sqrt{10})^2 - 9^2} = \sqrt{90 - 81} = \sqrt{9} = 3$. În triunghiul dreptunghic BMN aplicând teorema înălţimii (*într-un triunghi dreptunghic înăţimea*

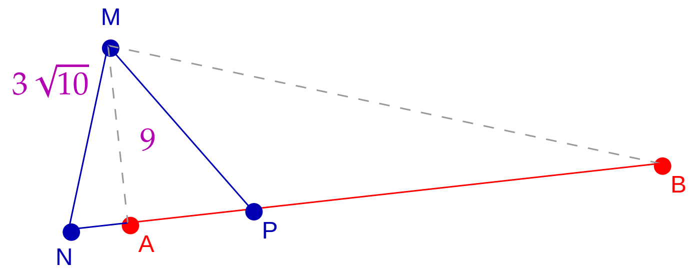

FIGURA 1. Exercițiul 12.

corespunzătoare unghiului drept este medie proporțională între proiecțiile ei pe ipotenuză), avem: $AM^2 = AN \cdot AB$, de unde $AB = \dfrac{AM^2}{AN} = \dfrac{9^2}{3} = \dfrac{81}{3} = 27$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Cele trei persoane cântăresc împreună $42 + 85 + 68 = \boxed{195}\, kg$.
    b. Fie m masa unui pachet. Liftul transportă trei persoane şi trei pachete identice care în total cântăresc $195 + 3m$. Cum în lift nu putem pune mai mult de 240 kg, pentru ca transportul să fie posibil trebuie ca $195 + 3m \le 240$ sau $3m \le 240 - 195$, de unde $m \le \dfrac{45}{3}$ sau $m \le 15$. Deci un pachet trebuie să cântărească cel mult $\boxed{15}\, kg$.
14. a. $E(x) = (x + 3)^2 + 2(x - 4)(x + 3) + (x - 4)^2 = [(x + 3) + (x - 4)]^2 = (2x - 1)^2$.
    b. $E(\sqrt{2}) \cdot E(-\sqrt{2}) = (2\sqrt{2} - 1)^2 \cdot (-2\sqrt{2} - 1)^2 = (2\sqrt{2} - 1)^2 \cdot (2\sqrt{2} + 1)^2 = \left[(2\sqrt{2} - 1) \cdot (2\sqrt{2} + 1)\right]^2 = \left[(2\sqrt{2})^2 - 1^2\right]^2 = (8 - 1)^2 = 7^2 = \boxed{49}$
    c. Conform punctului (a), avem $E(a) = (2a-1)^2$, care pentru orice $a \in \mathbb{R}$ este un număr mai mare sau egal cu zero. Cea mai mică valoare posibilă a lui $E(a)$ este zero, şi se obţine pentru $2a - 1 = 0$, sau $a = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. Pentru $a \in \mathbb{Z}$, numărul $2a - 1$ este număr impar, deci cea mai mică valoare a expresiei E va fi 1 şi se obţine pentru $(2a - 1)^2 = 1$ ceea ce revine la $2a - 1 = 1$ sau $2a - 1 = -1$, de unde $a \in \boxed{\{0, 1\}} \subset \mathbb{Z}$.
15. a.
    b. Formula ariei totale a conului este $A_t = \pi r(r + g)$. Avem deci nevoie de raza conului. Fie (VAB) o secţiune transversală a conului astfel încât planul (VAB) să fie perpendicular pe baza conului, AB un diametru al bazei şi O centrul cercului de bază. În triunghiul dreptunghic VOA aplicând teorema lui Pitagora avem: $AO = \sqrt{AV^2 - VO^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} =$

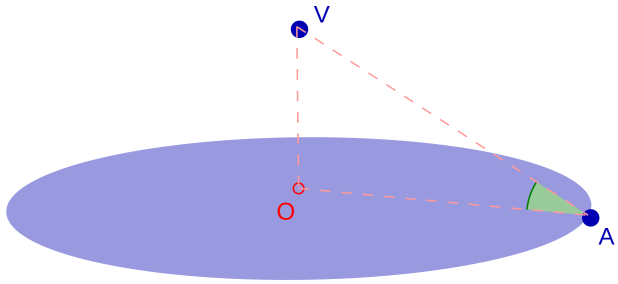

FIGURA 2. Exerciţiul 15.

$\sqrt{144-36} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$. Prin urmare $A_t = \pi \cdot 6\sqrt{3}(6\sqrt{3}+12) = \boxed{(108+72\sqrt{3})\pi}$.

c. Proiecţia lui VA pe planul bazei este AO, deci unghiul dintre VA şi planul bazei conului este $\widehat{VAO}$. În triunghiul dreptunghic VOA avem $\sin\widehat{VAO} = \frac{VO}{VA} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, de unde deducem că $\widehat{VAO} = \boxed{30°}$.

d. Pentru a vedea câţi litri de apă încape în vază determinăm volumul vazei (conului) $V_{con} = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (6\sqrt{3})^2 \cdot 6 = 216\pi > 216 \cdot 3 = 648\ cm^3$. Cum $1\,cm^3 = 0,001\,dm^3$ şi $1\,l = 1\,dm^3$, volumul vazei este mai mare decât $0,648\,dm^3 = 0,648\,l > 0,5\,l$. Deci o jumătate de litru de apă încape în vaza dată.

CAPITOLUL 2

Varianta 37

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $6 + 15 : 3 = 6 + 5 = \boxed{11}$
2. Mai mare este numărul $\boxed{a = 4,2}$
3. $A = \{x \in \mathbb{R} | 3 \leq x \leq 7\} = \boxed{[3,7]}$
4. Un multiplu al numărului 7 este $7^4 = \boxed{3401}$. Dacă acesta nu vă place atunci luaţi $\boxed{7}$, sau $\boxed{14}$.
5. Observăm că termenii şirului sunt $0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, ...$ deci următorul termen al sirului va fi $6^2 = \boxed{36}$.
6. Conform teoremei lui Pitagora ipotenuza triunghiului este egală cu $\sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$, deci perimetrul este $6 + 8 + 10 = \boxed{24}$ cm
7. $V_{cilindru} = \pi r^2 h = \pi \cdot 4^2 \cdot 6 = 16 \cdot 6\pi = \boxed{96}\pi\ \text{cm}^3$
8. $A_t = 6 \cdot A_{\text{feţe}} = 6 \cdot 5^2 = \boxed{125}\ \text{cm}^2$

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{C}$: $F(\sqrt{2}) = \dfrac{1 - 2(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{2})^2 + 1} = \dfrac{1 - 4}{2 + 1} = \dfrac{-3}{3} = -1$.
10. $\boxed{D}$: Un sfert din numărul 2^{48} este $\dfrac{1}{4} \cdot 2^{48} = \dfrac{2^{48}}{2^2} = 2^{48-2} = 2^{46}$.
11. $\boxed{B}$: Avem $BC = AC - AB = 28 - 7 = 21$, iar din faptul că $AD = 2AC$ însemnă C este mijlocul segmentului AD, adică $AC = CD = 28$. Prin urmare $BD = BC + CD = 21 + 28 = 49$ cm.
12. $\boxed{D}$: Linia mijlocie în trapez este egală cu semisuma bazelor, deci $18 = \dfrac{24 + b}{2}$, unde b reprezintă lungimea bazei mici. Avem $24 + b = 36$, de unde $b = 36 - 24 = 12$ cm.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Fie f numărul fetelor şi b numărul băieţilor prezentaţi la faza de selecţie a concursului. Faptul că s-au prezentat de două ori mai multe fete decât băieţi se transcrie în relaţia $f = 2b \quad (1)$. Cum în finală sunt $f - 30$ fete şi $b - 6$ băieţi şi numărul de fete este egal cu numărul de baieţi, avem $f - 30 = b - 6 \quad (2)$. Înlocuind (1) în (2) obţinem $2b - 30 = b - 6$ sau $b = 24$, de unde $f = 2b = \boxed{48}$.

b. Iniţial avem $24 + 48 = 72$ participanţi, iar în finală rămân $(48 - 30) + (24 - 6) = 18 + 18 = 36$ participanţi. Deci în finală promovează $\frac{36}{72} = \boxed{50\%}$ din numărul de participanţi.

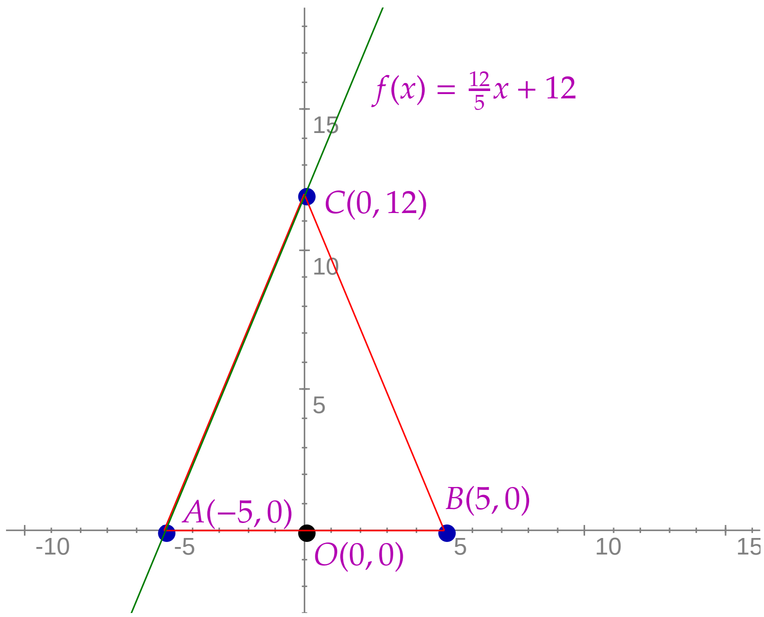

FIGURA 1. Exerciţiul 14.

14. a.

b. Baza triunghiului ABC este AB iar înălţimea este CO. Deci aria este $A_{ABC} = \frac{AB \cdot CO}{2} = \frac{10 \cdot 12}{2} = \boxed{60}$.

c. Cum funcţia f are ca reprezentare grafică dreapta AC, avem

$$\begin{cases} f(-5) = 0 & (1) \\ f(0) = 12 & (2) \end{cases}$$

Sistemul de mai sus este echivalent cu:

$$\begin{cases} -5a + b = 0 & (1) \\ b = 12 & (2) \end{cases}$$

Înlocuind $b = 12$ în (1) obţinem $-5a+12 = 0$, de unde $a = \frac{12}{5}$. Deci funcţia a cărei reprezentare grafică este dreapta AC este $\boxed{f(x) = \frac{12}{5}x + 12}$.

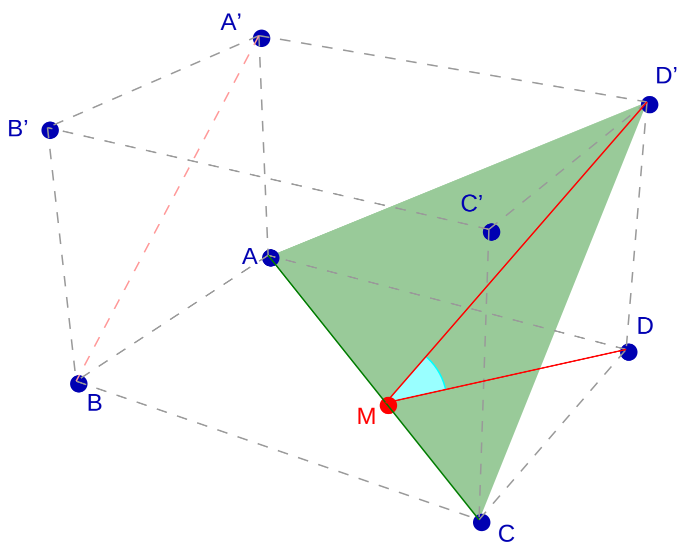

FIGURA 2. Exerciţiul 15.

15. a.
b. $A_l = 2A_{ABB'A'} + 2A_{BCC'B'} = 2 \cdot 30 \cdot 24 + 2 \cdot 40 \cdot 24 = 2 \cdot 24(30 + 40) = 48 \cdot 70 = \boxed{3360}\ cm^2$.
c. Din $AA' \perp (ABCD)$, $AB \perp BC$ şi $BC \subset (ABCD)$ conform teoremei celor trei perpendiculare rezultă că $A'B \perp BC$. Deci distanţa de la punctul A la dreapta BC este $A'B$. În triunghiul dreptunghic $A'AB$ conform teoremei lui Pitagora avem: $A'B = \sqrt{AB^2 + AA'^2} = \sqrt{30^2 + 24^2} = \sqrt{900 + 576} = \sqrt{1476} = \sqrt{6^2 \cdot 41} = \boxed{6\sqrt{41}}\ cm$.
d. Fie M piciorul perpendicularei din D pe AC. Din $DM \perp AC$, $DD' \perp (ADC)$ şi $AC \subset (ADC)$ rezultă conform teoremei celor trei perpendiculare că $D'M \perp AC$. Cum $(ACD) \cap (ACD') = AC$, $DM \perp AC$ şi $D'M \perp AC$ rezultă că unghiul planelor (ACD) şi (ACD') este unghiul $\widehat{DMD'}$.
În triunghiul dreptunghic ADC conform teoremei lui Pitagora avem: $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{40^2 + 30^2} = \sqrt{1600 + 900} = \sqrt{2500} = 50$. În acelaşi triunghi dreptunghic ADC, avem $DM = \frac{AD \cdot CD}{AC} = \frac{40 \cdot 30}{50} = 24$.
Deci triunghiul dreptunghic $D'DM$ este isocel ($DD' = DM = 24$), de unde $m(\widehat{DMD'}) = \boxed{45^\circ}$.

CAPITOLUL 3

Varianta 38

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $5 \cdot 4 - 2 = 20 - 2 = \boxed{18}$.
2. Media aritmetică a numerelor 27 şi 13 este egală cu $\frac{27+13}{2} = \frac{40}{2} = \boxed{20}$.
3. $\frac{20}{100} \cdot 360 = \boxed{72}$.
4. $f(4) = 2 \cdot 4 - 1 = 8 - 1 = \boxed{7}$.
5. Ştiind că o ora are 60 minute, două ore şi jumătate reprezintă $60 + 60 + 30 = \boxed{150}$ minute.
6. Aria triunghiului echilateral de latura 6 cm este $\frac{6 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{36 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \boxed{9\sqrt{3}}\,\mathrm{cm}^2$.
7. Dacă a este lungimea laturii cubului, lungimea diagonalei cubului este $a\sqrt{3}$. In cazul de faţă, rezultă $a = 4$. Prin urmare $A_l = 4 \cdot A_{\text{feţe}} = 4 \cdot a^2 = 4 \cdot 4^2 = 4 \cdot 16 = \boxed{64}\,\mathrm{cm}^2$.
8. $V_{cilindru} = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 5^2 \cdot 8 = \boxed{200}\pi\,\mathrm{cm}^3$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{C}$: Elementele mulţimii $M_3 \cap M_2 \cap M_5$ sunt numere care sunt multiplii de 2, de 3 şi de 5, iar cel mai mic multiplu comun al lui 2, 3 şi 5 este $2 \cdot 3 \cdot 5 = \boxed{30}$.
10. $\boxed{D}$: Dacă suma vârstelor celor doi fraţi este 31 de ani, suma vârstelor celor doi fraţi va fi 39 de ani peste $\frac{39-31}{2} = \frac{8}{2} = 4$ ani.
11. $\boxed{C}$: Fie M mijlocul lui CD, respectiv N al lui AD, Q al lui AB şi P al lui BC. Fie O intersecţia diagonalelor paralelogramului $ABCD$. Observăm că punctul O este şi intersecţia diagonalelor paralelogramului $MNPQ$. Apoi se observă că aria triunghiului OMP este jumătate din aria paralelogramului $OMCP$, aria lui OMN este jumătate din aria lui $OMDN$, aria lui ONQ este jumătate din aria lui $ONAQ$ şi aria lui OPQ este jumătate din aria lui $OPBQ$. Adunând toate acestea obţinem că aria lui $MNPQ$ este jumătate din aria lui $ABCD$, adică $36\,\mathrm{cm}^2$.

12. $\boxed{A}$: Fie E proiecţia lui D pe AB, iar F proiecţia lui C pe AB. Din faptul că trapezul $ABCD$ este isocel avem $AE = BF = \frac{AB - CD}{2} = \frac{12 - 6}{2} = 3$. În triunghiul dreptunghic AED, unghiul $\widehat{DAB} = 60°$, de unde rezultă că $\widehat{ADE} = 30°$. Cum cateta care se opune unghiului de $30°$ este jumătate din ipotenuză, avem că $AD = 2AE = 6$. Deci perimetrul lui $ABCD$ este $AB + 2AD + DC = 12 + 2 \cdot 6 + 6 = 30$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Buchetele de 5 flori în care putem folosi atât garoafe albe cât şi garoafe roşii după bunul plac, sunt de forma

$$(0r, 5a), (1r, 4a), (2r, 3a), (3r, 2a), (4r, 1a), (5r, 0a)$$

Aici $(1r, 4a)$ de exemplu înseamnă un buchet cu o garoafă roşie şi 4 garoafe albe. Numărul maxim este deci de 6 buchete (cele de tipurile indicate mai sus) din care oricum am lua 2 buchete ele nu conţin acelaşi număr de garoafe albe.

b. Inţelegem că Tudor cumpără câte un buchet din toate tipurile indicate mai sus. Intre acestea există exact 3 buchete cu cel puţin 3 garoafe roşii, anume $(3r, 2a), (4r, 1a), (5r, 0a)$. Deci probabilitatea ca un buchet să aibă cel puţin 3 garoafe roşii este $\frac{3}{6} = \boxed{\frac{1}{2}}$.

Comentariu: Enunţul părţii (b) a problemei este cel puţin ambiguu. Pronosticăm că marea majoritate a elevilor nu-l vor înţelege (nu atât din cauza dificultăţii ci a modului de prezentare) şi vor încerca să memoreze rezolvarea.

14. a.

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{x+1}{x^2+1} : \left(\frac{x+3}{4x-4} - \frac{1}{x-1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) \\ &= \frac{x+1}{x^2+1} : \left(\frac{x+3}{4(x-1)} - \frac{4}{4(x-1)}\right) \cdot \frac{x+1-1}{x+1} \\ &= \frac{x+1}{x^2+1} \cdot \frac{4(x-1)}{x+3-4} \cdot \frac{x}{x+1} \\ &= \frac{x+1}{x^2+1} \cdot \frac{4(x-1)}{x-1} \cdot \frac{x}{x+1} = \frac{4x}{x^2+1} \end{aligned}$$

b. $E(x) \cdot (x^2+1) = \frac{4x}{x^2+1} \cdot (x^2+1) = 4x$. Deci inecuaţia dată devine $4x \leq 1$, de unde $x \leq \frac{1}{4}$. Ţinând seama de domeniul de definiţie al lui E, deducem $x \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right] \cap (\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}) = \boxed{\left(-\infty, \frac{1}{4}\right] \setminus \{-1\}}$.

c. Valorile întregi ale lui a pentru care $E(a) \in \mathbb{Z}$, sunt acele valori ale lui $a \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$ pentru care $\frac{4a}{a^2+1} \in \mathbb{Z}$. Pentru asemenea valori avem atunci $a \cdot \frac{4a}{a^2+1} = \frac{4a^2}{a^2+1} \in \mathbb{Z}$. Dar $\frac{4a^2}{a^2+1} = \frac{4a^2+4-4}{a^2+1} = 4 - \frac{4}{a^2+1}$, deci se impune $\frac{4}{a^2+1} \in \mathbb{Z}$. Atunci a^2+1 trebuie să fie divizor al lui 4, adică $(a^2+1) \in \{1, 2, 4\}$ ceea ce este echivalent cu $a^2 \in \{0, 1, 3\}$ sau $a \in \{0, -1, 1, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$. Singura valoare întreagă şi din domeniul lui E este $a = \boxed{0}$.

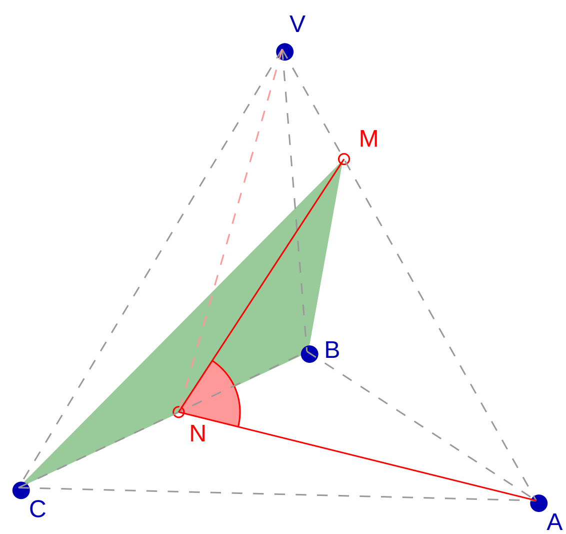

FIGURA 1. Exerciţiul 15.

15. a.

b. Din faptul că $VA = 4VM$ rezultă că $VM = \frac{VA}{3} = \frac{12}{4} = 3$, de unde $AM = AV - MV = 12 - 3 = 9$. Cum AN şi VN sunt înălţimi în triunghiuri echilaterale congruente, sunt congruente şi au lungimea egală cu $\frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$. Cum $AN = VN$ rezultă că triunghiul ANV este isocel. Fie P proiecţia lui N pe VA. Cum ANV este triunghi isocel, înălţimea este şi mediană, deci $PV = 6$, de unde $PM = PV - MV = 6 - 3 = 3$. În triunghiul dreptunghic APN conform teoremei lui Pitagora avem: $PN = \sqrt{AN^2 - AP^2} = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 - 6^2} = \sqrt{36 \cdot 3 - 36} = 6\sqrt{2}$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic MPN obţinem $MN = \sqrt{PM^2 + PN^2} =$

$\sqrt{3^2 + (6\sqrt{2})^2} = \sqrt{9+72} = \sqrt{81} = 9$. Deci $AM = MN = 9$, de unde rezultă că triunghiul AMN este isoscel.

c. Fie O centrul de greutate al triunghiului ABC. Cum piramida este regulată, VO este înălţimea piramidei. Baza piramidei este triunghiul echilateral ABC cu latura de lungime 12 şi cu înălţimea de lungime $\frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$, deci $AO = \frac{2}{3} \cdot 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic VOA avem $VO = \sqrt{VA^2 - AO^2} = \sqrt{12^2 - (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{144-48} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$. Prin urmare, $V_{VABC} = \frac{1}{3}A_{ABC} \cdot VO = \frac{1}{3} \cdot \frac{AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ}{2} \cdot 4\sqrt{6} = \frac{4\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{12 \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{12 \cdot 12 \cdot \sqrt{3}}{2} = 48\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} = \boxed{144\sqrt{2}}$.

d. Avem $BC \perp AN$ şi $BC \perp VN$, deci $BC \perp (VAN)$. Ca o consecinţă, $BC \perp MN$. Din $AN \perp BC$, $MN \perp BC$, $MN \subset (MBC)$, $AN \subset (ABC)$ şi $(ABC) \cap (MBC) = BC$, rezultă că unghiul planelor (ABC) şi (MBC) este unghiul $\widehat{ANM}$. Scriind aria triunghiului AMN în două moduri avem

$$\frac{PN \cdot AM}{2} = \frac{AN \cdot MN \cdot \sin \widehat{ANM}}{2}$$

De aici, $PN \cdot AM = AN \cdot MN \cdot \sin \widehat{ANM}$ sau $6\sqrt{2} \cdot 9 = 6\sqrt{3} \cdot 9 \cdot \sin \widehat{ANM}$ de unde $\sin \widehat{ANM} = \frac{6\sqrt{2} \cdot 9}{6\sqrt{3} \cdot 9} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}}$.

CAPITOLUL 4

Varianta 39

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $10 - 2 \cdot 3 = 10 - 6 = \boxed{4}$
2. Cel mai mare număr natural scris în baza 10, cu patru cifre, diferite două câte două este $\boxed{9876}$.
3. $26 = 3 \cdot 8 + 2$, deci restul împărţirii lui 26 la 3 este $\boxed{2}$.
4. Cum $9^2 = 81$, rădăcina pătrată a numărului 81 este egală cu $\boxed{9}$.
5. $2x > 6$ este echivalent cu $x > \dfrac{6}{2}$ sau $x > 3$. Mulţimea soluţiilor inecuaţiei date este $\boxed{x \in (3, \infty)}$.
6. $BC = AC - AB = 8 - 3 = \boxed{5}\ cm$.
7. Diagonala cubului cu muchia de lungime $12\ cm$ are lungimea egală cu $\boxed{12\sqrt{3}}$ cm.
8. $V_{cilindru} = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 3^2 \cdot 7 = \boxed{63}\pi\,\mathrm{dm}^3$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{D}$: Ecuaţia $x^2 + 2x - 8 = 0$ se rescrie $(x^2 - 4) + (2x - 4) = 0$. Folosind formula $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, avem $(x - 2)(x + 2) + 2(x - 2) = 0$ sau $(x - 2)(x + 4) = 0$, de unde soluţiile sunt $x_1 = 2$ şi $x_2 = -4$.
10. $\boxed{A}$: Cea mai mică diferenţa între două elemente ale mulţimii $A = \{5, 1, 3, 0\}$ este $0 - 5 = -5$.
11. $\boxed{C}$: Triunghiurile dreptunghice DCN şi DAM au $DA = DC$ şi $CN = AM$ şi conform cazului de congruenţă catetă-catetă sunt congruente, deci $A_{DAM} = A_{DCN} = \dfrac{DC \cdot CN}{2} = \dfrac{6 \cdot 3}{2} = 9\ cm^2$. Prin urmare $A_{MND} = A_{ABCD} - A_{DAM} - A_{MBN} - A_{DCN} = 6^2 - 9 - \dfrac{3 \cdot 3}{2} - 9 = 18 - \dfrac{9}{2} = \dfrac{36 - 9}{2} = \dfrac{27}{2} = 13,5\,\mathrm{cm}^2$.
12. $\boxed{D}$: MD şi PN sunt linii mijlocii în triunghiurile ABD, respectiv BCD şi au lungimea egală cu $\dfrac{BD}{2}$, iar PQ, MN sunt linii mijlocii în triunghiurile ADC, respectiv ABC şi au lungimea egală cu $\dfrac{AC}{2}$. Prin urmare $P_{MNPQ} = MN + MQ + QP + PN = 2\dfrac{BD}{2} + 2\dfrac{AC}{2} = BD + AC = 12 + 16 = 28$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Cum prima scumpire este de 10% din preţul iniţial de 250 lei, preţul obiectului după această scumpire este $250 + \frac{10}{100} \cdot 250 = 250 + 25 = \boxed{275}$ lei.

b. Preţul obiectului după cele două scumpiri este de $250+80 = 330$ lei. Deci între cele două scumpiri preţul obiectului s-a modificat cu $330 - 275 = 55$ lei. Procentul de modificare a preţului la a doua scumpire a fost de $\frac{55}{275} = 0,2 = 20\%$.

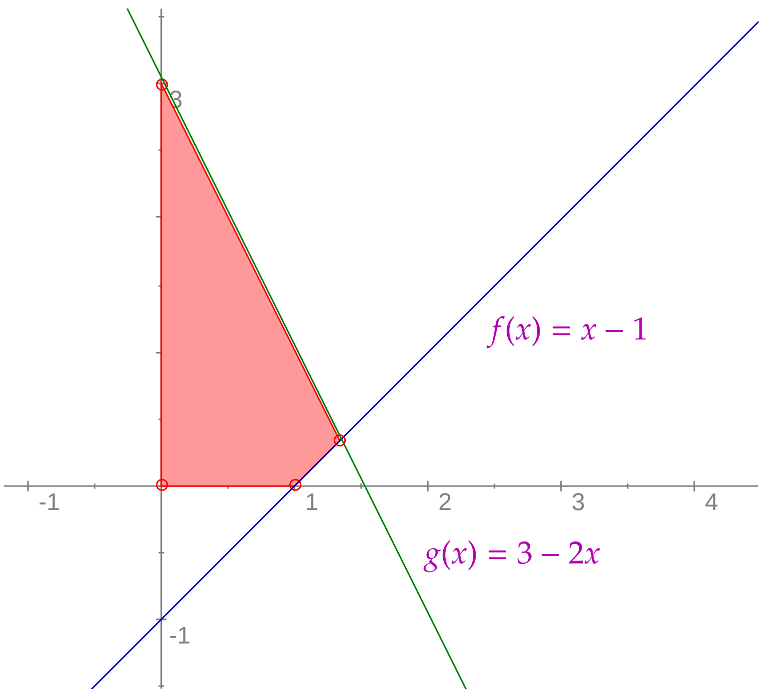

FIGURA 1. Exerciţiul 14.

14. a.

b. Determinăm mai întâi punctele de intersecţie ale graficului funcţiei f cu axele Ox, respectiv Oy. Punctele de pe axa Ox au ordonata zero, adică $y = 0$, iar abscisa se obţine rezolvând ecuaţia $x - 1 = 0$, de unde $x = 1$. Avem deci punctul de intersecţia $A(1,0)$. Punctele de pe axa Oy au abscisa zero, adică $x = 0$, iar ordonata este $y = f(0) = -1$. Obţinem punctul $B(0,-1)$.

În mod similar determinăm punctele de intersecţie dintre graficul funcţiei g şi axele de Ox, respectiv Oy. Obţinem punctele $C\left(\frac{3}{2},0\right)$ şi $D\,(0,3)$.

Determinăm în continuare punctul de intersecţie al graficelor funcţiilor f şi g. Pentru aceasta rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} y &= x-1 \quad (1) \\ y &= 3-2x \quad (2) \end{cases}$$

Scăzând ecuaţia (2) din ecuaţia (1), avem $0 = x-1-3+2x$ ceea ce este echivalent cu $3x = 4$, de unde $x = \frac{4}{3}$, iar $y = x-1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$.
Intersecţia graficelor lui f şi g este punctul $M\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
Notăm cu P proiecţia lui M pe Ox. Patrulaterul a cărui arie vrem să o calculăm este patrulaterul $OAMD$, iar $A_{OAMD} = A_{DOC} - A_{AMC} = \frac{DO \cdot OC}{2} - \frac{AC \cdot MP}{2} = \frac{3 \cdot \frac{3}{2}}{2} - \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{2} = \frac{9}{4} - \frac{1}{12} = \frac{27-1}{12} = \frac{26}{12} = \boxed{\frac{13}{6}}$.

c. Fie $a \in \mathbb{Z}$ astfel ca $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{a-1}{3-2a} \in \mathbb{Z}$. Atunci $2 \cdot \frac{a-1}{3-2a} \in \mathbb{Z}$. Dar $\frac{2a-2}{3-2a} = \frac{2a-3+1}{3-2a} = -1 + \frac{1}{3-2a}$, deci se impune ca $3-2a$ să fie un divizor al lui 1. Avem cazurile $3-2a = 1$, de unde $a = 1$, sau $3-2a = -1$, de unde $a = 2$. Se verifică uşor că $\frac{f(1)}{g(1)} = 0 \in \mathbb{Z}$ şi $\frac{f(2)}{g(2)} = -1 \in \mathbb{Z}$, deci ambele valori convin şi $\boxed{a \in \{1, 2\}}$.

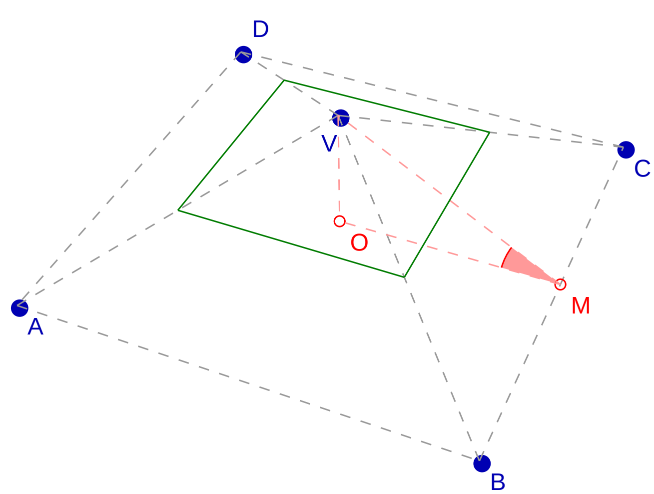

FIGURA 2. Exerciţiul 15.

15. a.

b. Fie O intersecţia diagonalelor bazei. Cum piramida este regulată, VO este înălţimea piramidei. Fie M mijlocul segmentului BC, deci VM este apotema piramidei. În triunghiul dreptunghic VOM aplicând teorema lui

Pitagora avem: $VO = \sqrt{VM^2 - OM^2} = \sqrt{12^2 - (6\sqrt{3})^2} = \sqrt{144-108} = \sqrt{36} = 6$. Avem deci, $V_{VABCD} = \frac{1}{3}A_{ABCD} \cdot VO = \frac{1}{3} \cdot (12\sqrt{3})^2 \cdot 6 = 2 \cdot 144 \cdot 3 = \boxed{864}\ cm^3$.

c. Din $VM \perp BC$, $OM \perp BC$ şi $(VBC) \cap (ABCD) = BC$, rezultă că unghiul dintre faţa laterala (VBC) şi planul bazei $(ABCD)$ este unghiul $\widehat{VMO}$. În triunghiul dreptunghic VOM avem $\sin\widehat{VMO} = \frac{VO}{VM} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, de unde $\widehat{VMO} = \boxed{30°}$.

d. Notăm cu $(A'B'C'D')$ planul de secţiune şi cu O' piciorul perpendicularei din V pe planul de secţiune $(A'B'C'D')$. Fie de asemenea, M' intersecţia lui VM cu planul $A'B'C'D'$. Din ipoteză $A_{\text{laterală A'B'C'D'ABCD}} = \frac{75}{100}A_{\text{laterală VABCD}}$, de unde rezultă că $A_{\text{laterală VA'B'C'D'}} = \frac{25}{100}A_{\text{laterală VABCD}}$ ceea ce este echivalent cu $\frac{A_{\text{laterală VA'B'C'D'}}}{A_{\text{laterală VABCD}}} = \frac{1}{4}$. Dar $\frac{A_{\text{laterală VA'B'C'D'}}}{A_{\text{laterală VABCD}}} = \frac{A_{VB'C'}}{A_{VBC}} = \frac{VM' \cdot B'C'}{VM \cdot BC}$. Din asemănarea triunghiurilor $VB'C'$ şi VBC avem $\frac{VM'}{VM} = \frac{B'C'}{BC}$, iar din asemănarea triunghiurilor $VO'M'$ şi VOM avem $\frac{VO'}{VO} = \frac{VM'}{VM}$. Deducem astfel că $\frac{A_{\text{laterală VA'B'C'D'}}}{A_{\text{laterală VABCD}}} = \left(\frac{VO'}{VO}\right)^2$, de unde avem că $\frac{VO'}{VO} = \frac{1}{2}$. Prin urmare, $OO' = VO - VO' = VO - \frac{VO}{2} = \frac{VO}{2} = \frac{6}{2} = \boxed{3}\ cm$.

CAPITOLUL 5

Varianta 40

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $7 \cdot 5 + 2 = 35 + 2 = \boxed{37}$
2. Numărul natural este $\boxed{8}$.
3. Inecuaţia $2x + 4 \geq 6$ este echivalentă cu $2x \geq 6 - 4$ sau $2x \geq 2$, de unde $x \geq 1$. Deci din mulţimea $S = \{-2, -1, 0, 1\}$, $\boxed{1}$ este singura soluţie a inecuaţiei date.
4. $f(4) = 2 - 4 = \boxed{-2}$.
5. $L_{cerc} = 2\pi \cdot r = 2\pi \cdot 7 = \boxed{14}\pi$ cm.
6. Lungimea diagonalei unui pătrat de latura 3 este egală cu $\boxed{3\sqrt{2}}\ cm$
7. AC este diagonala pătratului $ABCD$ de latură $1\ cm$ şi are lungimea egală cu $1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$. În triunghiul dreptunghic ACC' aplicând teorema lui Pitagora avem $AC' = \sqrt{AC^2 + CC'^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 2^2} = \sqrt{2+4} = \boxed{\sqrt{6}}\ cm$.
8. $A_t = 6 \cdot A_{\text{feţe}} = 6 \cdot 6^2 = 6 \cdot 36 = \boxed{216}\ cm^2$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{B}$: $b^2 - c^2 = 45$ este echivalentă cu $(b-c)(b+c) = 45$. Folosind faptul că $b + c = 5$ avem $5(b-c) = 45$, sau $-5(b-c) = -45$, de unde $5c - 5b = -45$.
10. $\boxed{C}$: Pentru $x = 2$, sau $x = 3$, sau $x = 4$, fracţia $\dfrac{x}{6}$ s-ar mai putea simplifica, ceea ce contrazice ipoteza. Prin urmare $x \geq 5$ şi atunci $5 \cdot x \geq 25$, de unde rezultă că numărătorul fracţiei $\dfrac{5 \cdot x}{24}$ este mai mic decât numitorul şi deci fracţia este supraunitară.
11. $\boxed{C}$: Fie R piciorul perpendicularei din M pe BC. În triunghiul dreptunghic MRB avem $\sin \widehat{MBR} = \dfrac{MR}{MB}$ sau $\sin 60° = \dfrac{MR}{2}$, de unde $MR = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3}\ cm$. Cum $MP \| BC$ (MP linie mijlocie în triunghiul ABC), înălţimea din unghiul B a triunghiului MBP este egală cu MR, de unde $A_{MBP} = \dfrac{MR \cdot MP}{2} = \dfrac{\sqrt{3} \cdot \frac{BC}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3} \cdot 2}{2} = \sqrt{3}\ cm^2$.

12. $\boxed{A}$: Fie $m(\widehat{ACE}) = m(\widehat{BCE}) = x$. Din faptul că $ABCD$ este romb avem $AB = AC$, deci triunghiul ABC este isocel, iar $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{ACB}) = 2x$. Pe de altă parte $m(\widehat{AEC}) = 180^\circ - m(\widehat{BEC}) = 180^\circ - 15^\circ = 165^\circ$. În triunghiul AEC avem $m(\widehat{AEC}) + m(\widehat{EAC}) + m(\widehat{ACE}) = 180^\circ$, ceea ce este echivalent cu $165^\circ + 2x + x = 180^\circ$, de unde $3x = 180^\circ - 165^\circ$ sau $x = \frac{15^\circ}{3} = 5^\circ$. Deci $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{BAC}) = 10^\circ$ de unde $m(\widehat{ABC} = 180^\circ - (10^\circ + 10^\circ) = 160^\circ$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Pentru $n = 0$ avem $x = -11+3\cdot(-1)^1 = -11-3 = -14$ şi $y = 18-3\cdot(-1)^0 = 18 - 3 = 15$, deci $x - y = -14 - 15 = \boxed{-29}$

b. Dacă n este par, avem $x = 14k-11+3\cdot(-1)^{2k+1} = 14k-11-3 = 14k-14 = 14(k-1)$ şi $y = 14k+18-3(-1)^{2k} = 14k+18-3 = 14k+15 = (14k+14)+1 = 14(k+1)+1$. Deci x este număr par iar y este impar, prin urmare x nu poate să dividă pe y.
Dacă n este impar, există $k \in \mathbb{Z}$ astfel ca $n = 2k+1$ şi avem $x = 7(2k+1) - 11 + 3(-1)^{2k+1+1} = 14k + 7 - 11 + 3 = 14k - 1$ şi $y = 7(2k+1) + 18 - 3(-1)^{2k-1} = 14k + 7 + 18 + 3 = 14k + 28 = (14k-1) + 29 = x + 29$. Deci pentru ca x să-l dividă pe $y = x + 29$, se impune ca $x = 14k - 1$ să dividă pe 29. Atunci $14k - 1 \in \{-1, 1, -29, 29\}$ ceea ce este echivalent cu $14k \in \{0, 2, -28, 30\}$ sau $k \in \left\{0, \frac{1}{7}, -2, \frac{30}{14}\right\}$. Cum însă $k \in \mathbb{N}$, rezultă $k \in \{0, -2\}$ şi ın consecinţă $\boxed{n \in \{-3, 1\}}$.

14. a. Faptul că 3 este soluţie pentru cele două ecuaţii revine la

$$\begin{cases} 3a + 4 = 0 & (1) \\ 18 + b = 0 & (2) \end{cases}$$

Rezolvând aceste ecuaţii în variabilele a şi b, deducem $\boxed{a = -\frac{4}{3}}$, $\boxed{b = -18}$.

b. Soluţia ecuaţiei $ax + 4 = 0$ este $x = -\frac{4}{a}$. Avem $x = -\frac{4}{a} \in \mathbb{N}$, dacă şi numai dacă a divide pe 4 şi $a < 0$, adică $a \in \boxed{\{-1, -2, -4\}}$.

c. Fie α soluţia comună. Rezolvând ecuaţiile $\alpha = -\frac{4}{a} = -\frac{b}{6}$. Din ultima egalitate, făcând produsul mezilor cu al extremilor, avem $\boxed{ab = 24}$.

15. a.

b. Fie N piciorul perpendicularei din C pe DB şi fie a lungimea muchiei piramidei $ABCD$. Segmentul CN este înălţime în triunghiul echilateral BCD cu latura de lungime a şi are lungimea egală cu $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Cum DO este înălţimea piramidei regulate $ABCD$, O este centrul de greutate al

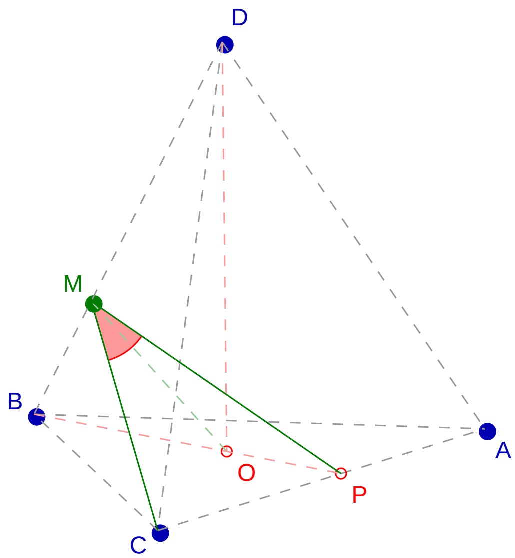

FIGURA 1. Exercițiul 15.

triunghiului ABC şi cum centrul de greutate al unui triunghi se găseşte la $\frac{2}{3}$ de vârful triunghiului avem $BO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. În triunghiul dreptunghic DOB aplicând teorema catetei pentru cateta BO obţinem: $BO^2 = BM \cdot DB$, de unde $BM = \frac{BO^2}{DB} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}{a} = \frac{3a^2}{9a} = \frac{a}{3}$. Prin urmare $MN = BN - BM = \frac{a}{2} - \frac{a}{3} = \frac{a}{6}$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul CMN avem: $CM^2 = MN^2 + NC^2$. Substituind, $(2\sqrt{7})^2 = \left(\frac{a}{6}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$, sau $4 \cdot 7 = \frac{a^2}{36} + \frac{3a^2}{4}$, ceea ce este echivalent cu $36 \cdot 28 = a^2 + 27a^2$, sau $36 \cdot 28 = 28a^2$. De aici, $a^2 = 36$ şi astfel $a = 6\ cm$.

c. În triunghiul dreptunghic BOD aplicând teorema lui Pitagora avem: $DO = \sqrt{BD^2 - BO^2} = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{36 - 12} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$. Prin urmare, $V_{ABCD} = \frac{1}{3} A_{ABC} \cdot DO = \frac{1}{3} \cdot \frac{AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ}{2} \cdot 2\sqrt{6} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{36\sqrt{3}}{4} = \boxed{18\sqrt{2}}\ cm^3$.

d. Fie $BO \cap AC = \{P\}$. Din $CP \perp BP$ (BP înălţime în triunghiul ABC), $CP \perp DP$ (DP înălţime în triunghiul ACD) şi $BP, DP \in (BPD)$, rezultă că $CP \perp (BPD)$. Cum P este proiecţia lui C pe planul (BOD), rezultă că unghiul dintre MC şi planul (BOD) este unghiul $\widehat{CMP}$. În triunghiul dreptunghic MPC avem $\sin\widehat{CMP} = \frac{PC}{MC} = \frac{3}{2\sqrt{7}} = \boxed{\frac{3\sqrt{7}}{14}}$.