BAC 2007

Pro–Didactica

Testare Naţională

Rezolvările variantelor 31–35

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

Cuprins

CAPITOLUL 1

Varianta 31.

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $2007 - 1989 = \boxed{18}$
2. Mai mare este numărul $\boxed{a = 2,34}$
3. Media geometrică a numerelor 1 şi 9 este $\sqrt{1 \cdot 9} = \boxed{3}$
4. Avem $70 = 4 \cdot 17 + 2$, deci câtul împărţirii este $\boxed{17}$
5. $P = 4 \cdot l$, deci $l = \frac{P}{4} = \frac{48}{4} = \boxed{12}$ cm
6. $A_{disc} = \pi r^2$, de unde $r^2 = \frac{A_{disc}}{\pi} = 256$. Deci, $r = \sqrt{256} = \boxed{16}$ cm
7. Deoarece $A'B' \| AB$, unghiul dintre $A'B'$ şi AC este unghiul BAC a cărui măsură este $\boxed{45^\circ}$.
8. Piramida are 4 feţe, deci $A_{\text{totală}} = 4 \cdot A_{\text{feţei}} = 4 \cdot 16\sqrt{3} = \boxed{64\sqrt{3}}\,\text{cm}^2$

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{D}$: Inecuaţia $2x - 1 \leq 2$ este echivalentă cu $2x \leq 2 + 1$ sau $2x \leq 3$, de unde $x \leq \frac{3}{2}$, adică $x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$.
10. $\boxed{D}$: Ecuaţia o putem scrie $2x^2 + x + 2x + 1 = 0$, sau $x(2x + 1) + (2x + 1) = 0$, de unde $(x + 1)(2x + 1) = 0$. Cele două soluţii ale ecuaţiei sunt $x_1 = -1$ şi $x_2 = -\frac{1}{2}$.
11. $\boxed{C}$: Hexagonul se împarte în 6 triunghiuri echilaterale de latura egală cu latura hexagonului. Deci aria hexagonului este egală cu $6 \cdot \frac{2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ}{2} = 12 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.
12. $\boxed{B}$: Notăm lungimea catetelor triunghiului cu a şi aplicând teorema lui Pitagora, obţinem: $a^2 + a^2 = 2^2$, de unde $a^2 = \frac{4}{2} = 2$, deci $a = \sqrt{2}$. Perimetrul va fi $P = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2(\sqrt{2} + 1)\,\text{cm}$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Să notăm distanţa totală cu d. În prima zi, automobilul a parcurs $\frac{35}{100}d$, deci a rămas $d - \frac{35}{100}d = \frac{65}{100}d$. În a doua zi, 20% din distanţa rămasă adică $\frac{20}{100} \cdot \frac{65}{100}d = \frac{1}{5} \cdot \frac{65}{100}d = \frac{13}{100}d$. Ştim că automobilul a parcurs întreaga distanţă in cele trei zile, deci $\frac{35}{100}d + \frac{13}{100}d + 624 = d$. Rezolvând ecuaţia obţinem $\frac{48}{100}d + 624 = d$, de aici $d - \frac{48}{100} \cdot d = 624$, sau $\frac{52}{100}d = 624$. Deci $d = \frac{624 \cdot 100}{52} = \boxed{1200}$ km.

b. A doua zi automobilul a parcurs $\frac{13}{100} \cdot 1200 = 13 \cdot 12 = \boxed{156}$ km.

14. a. $n = f(\sqrt{5} - 5) - f(\sqrt{5} - 3) = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 5\right) + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 3\right) - \frac{3}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{3}{2} = \frac{2}{2} = \boxed{1} \in \mathbb{N}$.

b. Dacă $D(-5, -1)$ aparţine graficului funcţiei g atunci $g(-5) = -1$. Aceasta revine la $(1-m)\cdot(-5)+3m = -1$ ceea ce este echivalent cu $-5+5m+3m = -1$ sau $8m = -1 + 5$, de unde $m = \frac{4}{8} = \boxed{\frac{1}{2}}$.

c. $|f(x)| + |g(x)| = 6$ este echivalentă cu $\left|-\frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{2}\right| + |3| = 6$ sau $\left|-\frac{x}{2} + \frac{3}{2}\right| = 6 - 3$. Aducând la acelaşi numitor obţinem $|-x+3| = 6$. Pentru $-x+3 > 0$ sau $x < 3$ sau $x \in (-\infty, 3)$ ecuaţia devine $-x + 3 = 6$, ceea ce se rescrie $-x = 6 - 3$ a cărui soluţie este $x = -3 \in (-\infty, 3)$. Pentru $-x + 3 \leq 0$ sau $x \in [3, \infty)$, ecuaţia se scrie $-(-x + 3) = 6$ sau $x - 3 = 6$, a cărui soluţie este $x = 9 \in [3, \infty)$. Deci soluţiile ecuaţiei sunt $\boxed{\{-3, 9\}}$.

15. a.

b. Punctele O, O' sunt mijloacele lui $A'B$, respectiv BC', fiind intersecţia diagonalelor dreptunghiurilor $(ABB'A')$, respectiv $(BCC'B')$. Deci OO' este linie mijlocie în triunghiul $BA'C'$ şi $OO' \| A'C'$. Cum $BB' \perp A'C'$ $(BB' \perp (A'B'C')$ şi $OO' \| A'C$ rezultă că $OO' \perp BB'$.

c. Fie M proiecţia lui B pe OO'. Evident M este mijlocul lui OO' deoarece triunghiul BOO' este isoscel şi înălţimea în triunghiul isoscel este şi mediană. Vom calcula BM din triunghiul dreptunghic BMO prin aplicarea teoremei lui Pitagora. Pentru aceasta calculăm OM şi OB. Avem $OM = \frac{OO'}{2} = \frac{A'C'}{4} = \frac{8}{4} = 2$. Apoi $A'B$ este diagonală în dreptunghiul $ABB'A'$ şi este egală cu $\sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$. Prin urmare $OB = \frac{A'B}{2} = \frac{10}{2} = 5$. Î n final, $BM = \sqrt{OB^2 - OM^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{25 - 4} = \boxed{\sqrt{21}}$.

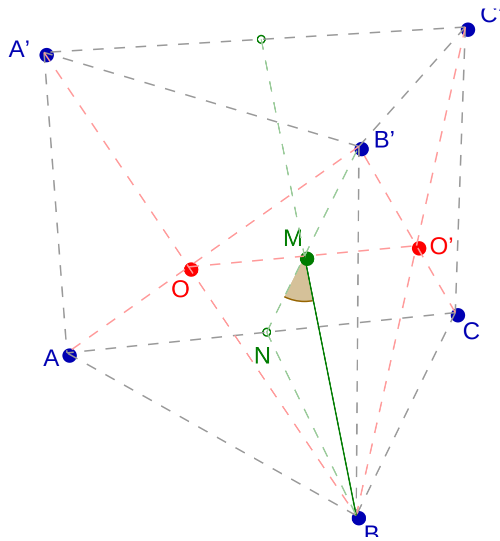

FIGURA . Exercițiul 15.

d. Fie $B'M \cap AC = \{N\}$. Din $OO' \| AC$ şi $B'M \perp OO'$ rezultă că $B'N \perp AC$. Avem deci, $NM \perp OO'$, $BM \perp OO'$ şi $(ACB') \cap (A'BC') = \{OO'\}$, de unde rezultă că unghiul planelor $(B'AC)$ şi $(BA'C')$ este unghiul $\widehat{BMN}$. Vom calcula $\sin \widehat{BMN}$ scriind aria triunghiului BMN în două moduri. Cum ACB' este triunghi isoscel înălţimea $B'N$ este şi mediană, deci N este mijlocul lui AC. Fie $BM \cap A'C' = Q$. În mod similar, avem că M este mijlocul lui BQ. Cum triunghiurile $AB'C$ şi $A'BC'$ sunt congruente (cazul latură-latură-latură) rezultă că $BQ = B'N$ (înălţimi în triunghiuri congruente) şi deci $BM = MN = \sqrt{21}$. Avem $\text{Aria}_{BMN} = \dfrac{BM \cdot MN \cdot \sin \widehat{BMN}}{2} = \dfrac{(\sqrt{21})^2 \cdot \sin \widehat{BMN}}{2}$. Dacă R este proiecţia lui M pe BN atunci $A_{BMN} = \dfrac{BN \cdot MR}{2}$. Avem $BN = \dfrac{8\sqrt{3}}{2}$ (înălţime într-un triunghi echilateral de latură 8), iar cum $MN \| BB'$ (amândouă perpendiculare pe BN) şi $NM = MB'$ avem că MR este linie mijlocie în triunghiul BNB' şi $MR = \dfrac{BB'}{2} = 3$. Egalând cele două arii obţinem: $\dfrac{(\sqrt{21})^2 \cdot \sin \widehat{BMN}}{2} = \dfrac{\frac{8\sqrt{3}}{2} \cdot 3}{2}$ ceea ce este echivalent cu $21 \cdot \sin \widehat{BMN} = 4\sqrt{3} \cdot 3$. Prin urmare, $\sin \widehat{BMN} = \dfrac{12\sqrt{3}}{21} = \boxed{\dfrac{4\sqrt{3}}{7}}$.

CAPITOLUL 2

Varianta 32.

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $(25-4):7 = 21:7 = \boxed{3}$
2. Din $A \cap B = \{2,3\}$ rezultă că elementele comune celor două mulţimi sunt $\{2,3\}$, deci $\boxed{a=2}$.
3. Cel mai mic multiplu comun al numerelor $4=2^2$ şi $6=2\cdot 3$ este $2^2\cdot 3 = \boxed{12}$
4. Numărul de **rafturi ocupat de cele** 800 **de cărţi** este egal cu $800:50 = \boxed{16}$.
   Comentariu: Biblioteca poate avea şi rafturi goale; nu avem suficiente informaţii pentru a afla **numărul total de rafturi**.
5. Dacă notăm măsurile celor două unghiuri suplementare cu a şi b, bisectoarele celor două unghiuri vor forma unghiul $\frac{a}{2}+\frac{b}{2} = \frac{180^\circ}{2} = \boxed{90^\circ}$
6. Laturile rombului sunt egale, deci lungimea laturii rombului este $\frac{P}{4} = \frac{48}{4} = \boxed{12}$ cm.
7. Fiecare faţă a piramidei este un triunghi echilateral cu latura 10 cm. Aria unei feţe este egală cu $\frac{10\cdot 10\cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{50\cdot\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$. Piramida are patru feţe identice, deci aria totală a piramidei va fi $A_{tot} = 4\cdot 25\sqrt{3} = \boxed{100\sqrt{3}}$.
8. $V_{cub} = 6^3 = \boxed{216}\,\text{cm}^3$

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{C}$: Ecuaţia $(x+2)^2-3(x-1)-9=0$ este echivalentă cu $x^2+4x+4-3x+3-9=0$, sau $x^2+x-2=0$. Aceasta se poate scrie $x^2+2x-x-2=0$, sau $x(x+2)-(x+2)=0$, sau $(x-1)(x+2)=0$. Cele două soluţii sunt $x_1=1$ şi $x_2=-2$.
10. $\boxed{D}$: Aducem cele două fracţii la numitor comun şi efectuăm operaţiile
$$\frac{(\sqrt{3}-3)(\sqrt{3}+1)-2}{2(\sqrt{3}+1)} = \frac{3+\sqrt{3}-3\sqrt{3}-3-2}{2(\sqrt{3}+1)} = \frac{-2\sqrt{3}-2}{2(\sqrt{3}+1)} = -1\,.$$
11. $\boxed{B}$: Unghiul ABC este unghi cu vârful pe cerc (înscris în cerc) şi are măsura egală cu jumătate din măsura arcului de cerc cuprins între laturi, adică $\frac{170^\circ}{2} = 85^\circ$.

12. $\boxed{C}$: Fie h distanţa de la A la diagonala BD. Aria triunghiului ABD o putem scrie în două moduri.

- $A_{ABD} = \dfrac{BD \cdot h}{2}$. Pe BD îl obţinem aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul ABD: $BD = \sqrt{225+25} = 5\sqrt{10}$, deci $A_{ABD} = \dfrac{5h\sqrt{10}}{2}$
- $A_{ABD} = \dfrac{AD \cdot AB}{2} = \dfrac{75}{2}$.

Prin urmare $\dfrac{5h\sqrt{10}}{2} = \dfrac{75}{2}$, de unde obţinem $h = \dfrac{75}{5\sqrt{10}} = \dfrac{15\sqrt{10}}{10} = \dfrac{3\sqrt{10}}{2} = 1,5\sqrt{10}$ cm.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Notând cu x numărul de răspunsuri corecte şi cu y numărul de răspunsuri incorecte, obţinem un sistem de două ecuaţii cu două necunoscute:

$$\begin{cases} x+y &= 100 \quad (1) \\ 5x-3y &= 340 \quad (2) \end{cases}$$

Din (1) avem $x = 100 - y$ şi înlocuind în (2) obţinem $500 - 5y - 3y = 340$ sau $8y = 160$, de unde $y = \dfrac{160}{8} = 20$. Pentru $y = 20$ găsim $x = \boxed{80}$.

b. Să notăm în acest caz cu z numărul de răspunsuri corecte si cu v numărul de răspunsuri incorecte. Obţinem:

$$\begin{cases} z+v &= 100 \quad (1) \\ 5z-3v &> 450 \quad (2) \end{cases}$$

Înlocuind $v = 100 - z$ în a doua ecuaţie, obţinem $8z > 750$, de unde $z > 93,75$. Deci, numărul minim de răspunsuri corecte este $\boxed{94}$.

14. a. Dacă $A(a, 25)$ aparţine reprezentării grafice a funcţiei f, atunci $f(a) = 25$ ceea ce revine la $(a+1)a+5 = 25$ sau $a^2+a-20 = 0$. Ecuaţia de gradul doi în a se poate rescrie ca $(a^2-16)+(a-4) = 0$ sau $(a-4)(a+4)+(a-4) = 0$ sau $(a-4)(a+5) = 0$. Soluţiile ecuaţie sunt $a_1 = \boxed{4}$ şi $a_2 = \boxed{-5}$.

b.

c. Pentru $a = 4$, avem $f(x) = 5x+5$. Cum $M(m,n)$ aparţine graficului funcţiei f avem $f(m) = n$ sau $5m+5 = n$. Avem deci de rezolvat sistemul:

$$\begin{cases} 5m+5 &= n \quad (1) \\ 5|m| &= |n| \quad (2) \end{cases}$$

Înlocuind n din ecuaţia (1) în ecuaţia (2) obţinem $5|m| = |5m+5|$ ceea ce este echivalent cu $|m| = |m+1|$. Pentru $m < -1$ sau $m \in (-\infty, -1)$ ecuaţia devine $-m = -m-1$, ecuaţie imposibilă. Pentru $-1 \leq m < 0$ sau $m \in [-1, 0)$ ecuaţia se scrie $-m = m+1$ sau $2m = -1$, de unde

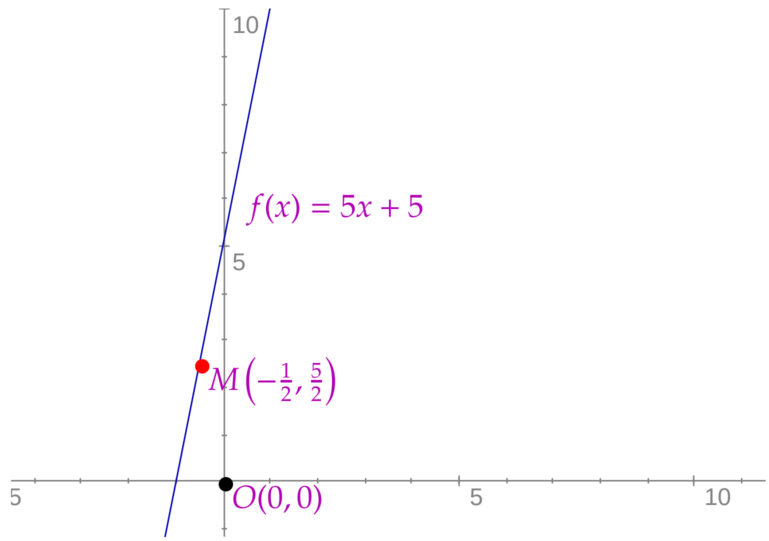

FIGURA . Exercițiul 14.

$m = \dfrac{-1}{2} \in [-1, 0)$. Pentru $m \geq 0$ sau $m \in [0, \infty)$, avem ecuaţia $m = m + 1$ care este imposibilă. Pentru $m = \dfrac{-1}{2}$ avem $n = 5\dfrac{-1}{2} + 5 = \dfrac{-5+10}{2} = \dfrac{5}{2}$.

Soluţia problemei este punctul $\boxed{M\left(\dfrac{-1}{2}, \dfrac{5}{2}\right)}$.

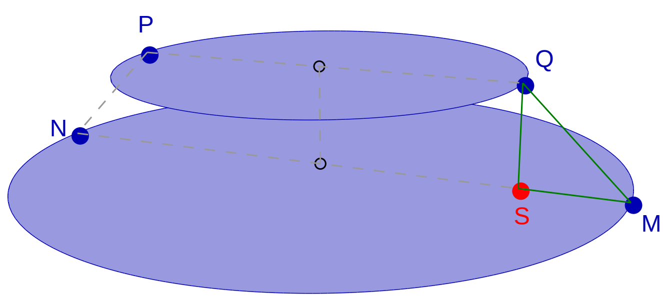

FIGURA . Exercițiul 15.

15. a.

b. Fie $MNPQ$ o secţiune axială a trunchiului de con care intersectează baza mare în punctele M, N, iar baza mică în punctele P, Q. Notăm cu S proiecţia lui Q pe MN şi cu R, respectiv r, raza bazei mari, respectiv a bazei mici. În triunghiul dreptunghic MSQ avem: $\cos \widehat{SMQ} = \dfrac{MS}{MQ}$.

Înlocuind $MS = R - r$ obţinem $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{R-r}{10\sqrt{2}}$, de unde $R - r = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot 10\sqrt{2}$

sau $R - r = 10 \quad (1)$. Din ipoteză ştim că lungimilor razelor trunchiului de con sunt direct proporţionale cu numerele 2 şi 3 ceea ce se scrie $\frac{r}{2} = \frac{R}{3}$, sau $r = \frac{2R}{3}$. Înlocuind în relaţia (1) avem: $R - \frac{2R}{3} = 10$, de unde $R = 30$.

c. Pentru a calcula aria totală a trunchiului de con avem nevoie de raza r a bazei mici. De la punctul precedent avem $r = \frac{2R}{3} = \frac{2 \cdot 30}{3} = 20$. Prin urmare, $A_t = \pi g(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2 = \pi 10\sqrt{2}(30 + 20) + \pi \cdot 30^2 + \pi \cdot 20^2 = 500\sqrt{2}\pi + 900\pi + 400\pi = 500\sqrt{2}\pi + 1300\pi = \boxed{100\pi(5\sqrt{2} + 13)}$

d. Trebuie calculat volumul trunchiului de con, iar pentru aceasta avem nevoie de înălţimea trunchiului. Triunghiul dreptunghic MSQ are un unghi de 45°, deci este isoscel. Atunci $QS = 10$. Deci, $V_{\text{trunchi}} = \frac{\pi h(R^2 + r^2 + R \cdot r)}{3} = \frac{\pi 10(30^2 + 20^2 + 30 \cdot 20)}{3} = \frac{\pi 10(900 + 400 + 600)}{3} = \frac{19000\pi}{3}\,\text{cm}^3$. Cum $1\,\text{litru} = 1\,\text{dm}^3 = 1000\,\text{cm}^3$ obţinem $V_{\text{trunchi}} = \frac{19000\pi}{3}\,\text{cm}^3 = \frac{19\pi}{3}\,\text{dm}^3 = \frac{19\pi}{3}\,\text{litri} < \frac{19 \cdot 3,15}{3}\,\text{litri} = 19,95\,\text{litri} < 20\,\text{litri}$, ceea ce înseamnă că $20\,\text{litri}$ de apă nu încap în trunchiul de con.

CAPITOLUL 3

Varianta 33.

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $10 : 2 + 2 = 5 + 2 = \boxed{7}$.
2. $5x + 2 = 17$ este echivalent cu $5x = 17 - 2$ sau $5x = 15$, de unde $x = \frac{15}{5} = \boxed{3}$.
3. Media geometrică a numerelor 2 şi 8 este egală cu $\sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = \boxed{4}$.
4. Mulţimea $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ are în total 7 elemente dintre care 4 numere impare, deci probabilitatea ca alegând la întâmplare un număr acesta să fie impar este $\boxed{\frac{4}{7}}$.
5. Perimetrul rombului este de 4 ori lungimea laturii rombului, deci $4 \cdot 10 = \boxed{40}\,\text{mm}$.
6. $A_{trapez} = \frac{(B + b) \cdot h}{2} = \frac{(12 + 4) \cdot 6}{2} = \frac{16 \cdot 6}{2} = \boxed{48}\,\text{cm}^2$.
7. Ştim că $V_{\text{sferă}} = \frac{4\pi r^3}{3}$, de unde $r^3 = \frac{3 \cdot V_{\text{sferă}}}{4\pi} = \frac{3 \cdot 36\pi}{4\pi} = 27$. Avem deci $r = \boxed{3}\,\text{cm}$.
8. Piramida având toate muchiile congruente are aria totală egală cu $4 \cdot A_{\text{feţe}} = 4 \cdot \frac{6 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ}{2} = 72 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{36\sqrt{3}}\,\text{cm}^2$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{C}$: Pentru $f(x) = 2x + 1$, avem $f(-1) = -1$. Într-adevăr, $2 \cdot (-1) + 1 = -1$ sau $-2 + 1 = -1$ ceea ce este adevărat, deci $A(-1, -1)$ aparţine graficului funcţiei $f(x) = 2x + 1$.
10. $\boxed{D}$: $5x + 8 \leq 33$ este echivalent cu $5x \leq 33 - 8$, sau $5x \leq 25$, de unde $x \leq \frac{25}{5}$, sau $x \leq 5$. Avem $X = \mathbb{N}^* \cap (-\infty, 5] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
11. $\boxed{C}$: Din faptul că $MN \| BC$ rezultă că $\Delta AMN \sim \Delta ABC$, de unde $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ ceea ce revine la $\frac{6}{8} = \frac{AN}{12}$. Avem deci, $AN = \frac{12 \cdot 6}{8} = 9$, iar $NC = AC - AN = 12 - 9 = 3\,\text{cm}$.

12. $\boxed{D}$: Două unghiuri suplementare au suma măsurilor $180°$ şi cum unghiurile sunt congruente înseamnă că fiecare are măsura egală cu $\frac{180°}{2} = 90°$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Notăm cu b numărul băncilor din clasă, iar cu e numărul elevilor. Din faptul că aşezând câte un elev într-o bancą rămân 6 elevi în picioare rezultă că numărul băncilor este cu 6 mai mic decât numărul elevilor, adică $b = e - 6 \quad (1)$. Ştim că dacă se aşează câte 2 elevi într-o bancă, rămâne o bancă cu un elev şi 4 bănci libere. Asta înseamnă că numărul băncilor în care avem 2 elevi este $b - 5$, iar în cele $b - 5$ bănci avem aşezaţi $e - 1$ elevi, ceea ce dă relaţia $2(b - 5) = e - 1 \quad (2)$. Din relaţia (1) avem $e = b + 6$ şi înlocuind în (2) obţinem $2(b-5) = b+6-1$ ceea ce este echivalent cu $2b - 10 = b + 5$ sau $b = \boxed{15}$.

b. De la punctul precedent avem $e = b + 6 = 15 + 6 = \boxed{21}$.

14. a. $E(0) = \left(\frac{-4}{-9} - 1\right) : \left(\frac{1}{-3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{-9}\right) = \left(\frac{4}{9} - 1\right) : \frac{1}{9} = \frac{4-9}{9} \cdot 9 = \boxed{-5}$.

b.

$$\begin{aligned} E(x) &= \left(\frac{x^2-4}{x^2-9} - 1\right) : \left(\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x^2-9}\right) \\ &= \frac{x^2-4-x^2+9}{x^2-9} : \frac{x+3+x-3-1}{x^2-9} \\ &= \frac{5}{x^2-9} \cdot \frac{x^2-9}{2x-1} = \frac{5}{2x-1} \end{aligned}$$

c. $E(a) = \frac{5}{2a-1} \in \mathbb{Z}$ dacă şi numai dacă $2a - 1$ este divizor al lui 5, adică $2a - 1 \in \{-1, 1, -5, 5\}$. Studiem cazurile:

- $2a - 1 = -1$ implică $a = 0 \in \mathbb{Z} \setminus \{-3, 3\}$
- $2a - 1 = 1$, conduce la $a = \frac{2}{2} = 1 \in \mathbb{Z} \setminus \{-3, 3\}$
- $2a - 1 = -5$ implică $a = \frac{-4}{2} = -2 \in \mathbb{Z} \setminus \{-3, 3\}$
- $2a - 1 = 5$ dă $a = \frac{6}{2} = 3 \notin \mathbb{Z} \setminus \{-3, 3\}$

În concluzie $\boxed{a \in \{0, 1, -2\}}$.

15. a.

b. Folosind identitatea $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ avem $A_t = 2AB\cdot BC + 2AB\cdot BB' + 2BC\cdot CC' = (AB+BC+CC')^2 - (AB^2+BC^2+CC'^2)$. Din ipoteză suma tuturor muchiilor paralelipipedului este egală cu 60 cm, ceea ce revine la $4AB + 4BC + 4CC' = 60$ sau $AB + BC + CC' = 15$. Tot din ipoteză se dă lungimea diagonalei $AC' = 9\ cm$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul ACC' avem $AC'^2 = AC^2 + CC'^2 \overset{AC^2=AB^2+BC^2}{=} AB^2 +$

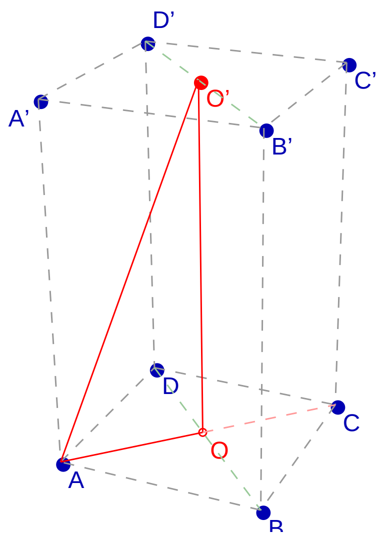

FIGURA . Exercițiul 15.

$BC^2 + CC'^2$. Revenind la calculul ariei totale obţinem: $A_t = (AB + BC + CC')^2 - (AB^2 + BC^2 + CC'^2) = 15^2 - AC'^2 = 225 - 81 = \boxed{144}\,\mathrm{cm}^2$.

c. AC este diagonala pătratului de latură 4 şi are lungimea egală cu $4\sqrt{2}$. Din $AB + BC + CC' = 15$, deducem $CC' = 7$. Deci $P_{ACC'A'} = 2CC' + 2AC = 2 \cdot 7 + 2 \cdot 4\sqrt{2} = \boxed{14 + 8\sqrt{2}}\ cm$.

d. Fie O intersecţia diagonalelor pătratului $ABCD$. Avem $AO \perp BD$ (diagonalele pătratului sunt perpendiculare) şi $AO \perp OO'$ ($AO \perp CC'$ şi $OO' \| CC'$), de unde rezultă că $AO \perp (DBD')$ (o dreaptă perpendiculară pe două drepte concurente din plan este perpendiculară pe plan). Deci proiecţia lui AO' pe planul (DBD') este OO', iar unghiul dintre AO' şi planul (DBD') este $\widehat{AO'O}$. În triunghiul dreptunghic AOO' avem

$$\mathrm{tg}\,\widehat{AO'O} = \frac{AO}{OO'} = \frac{\frac{AC}{2}}{CC'} = \boxed{\frac{2\sqrt{2}}{7}}$$

CAPITOLUL 4

Varianta 34.

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $6 + 2 \cdot 3 = 6 + 6 = \boxed{12}$.
2. Un număr pozitiv mai mic decât $0,16$ este $\boxed{0,00000000000000001}$. Dacă acesta nu vă place, atunci puteţi lua $\boxed{0,1}$.
3. Media aritmetică a numerelor 26 şi 18 este $\dfrac{26+18}{2} = \dfrac{44}{2} = \boxed{22}$.
4. 20% din 1020 este egal cu $\dfrac{20}{100} \cdot 1020 = \boxed{204}$.
5. Suma măsurilor unghiurilor alăturate într-un paralelogram este $180°$.
6. Triunghiurile dreptunghice formate în fiecare colţ al pătratului mare sunt isoscele şi au catetele de lungime $3\ cm$. Lungimea ipotenuzei se află prin aplicarea teoremei lui Pitagora şi este egală cu $\sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$. Suprafaţa acoperită cu puncte este un pătrat de latură $3\sqrt{2}$ şi are perimetrul egal cu $4 \cdot 3\sqrt{2} = \boxed{12\sqrt{2}}\ cm$.
7. Raza bazei cilindrului este egală cu $\dfrac{diametru}{2} = \dfrac{10}{2} = 5\ cm$. $A_l = 2\pi r g = 2\pi \cdot 5 \cdot 4 = \boxed{40\pi}\ cm^2$
8. $V_{paralelipiped} = 3 \cdot 4 \cdot 12 = \boxed{144}\ cm^3$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{A}$: $(\sqrt{3}+1)(1-\sqrt{3}) + 6 = (1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3}) + 6 \overset{(a-b)(a+b)=a^2-b^2}{=} 1^1 - (\sqrt{3})^2 + 6 = 1 - 3 + 6 = \boxed{4}$.
10. $\boxed{C}$: $E(1) = |1-3| + |1-1| + 2|-1| = |-2| + 0 + 2 = 2 + 2 = 4$.
11. $\boxed{C}$: Cum $[OB$ este bisectoarea unghiului AOC avem $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{BOC}) = 15°$. Avem astfel $m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) = 15° + 15° = 30°$. Din faptul că $[OC$ este bisectoarea unghiului $\widehat{AOD}$ rezultă că $m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{COD}) = 30°$, de unde $m(\widehat{AOD}) = m(\widehat{AOC}) + m(\widehat{COD}) = 30° + 30° = 60°$.
12. $\boxed{B}$: Cum unghiul NMP are măsura de $60°$, rezultă că $m(\widehat{MNP}) = 90° - m(\widehat{NMP}) = 90° - 60° = 30°$. Deci MP este cateta care se opune unghiului

de 30° şi are lungimea egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei, adică $\frac{6}{2} = 3\ cm$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. $0,(3) = \frac{3}{9} = \boxed{\frac{1}{3}}$, iar $0,1(6) = \frac{16-1}{90} = \frac{15}{90} = \boxed{\frac{1}{6}}$.

b. Faptul că numerele a şi b sunt direct proporţionale cu numerele 6, respectiv 3, revine la $\frac{a}{6} = \frac{b}{3}$ ceea ce este echivalent cu $a = 2b \quad (1)$. Faptul că numerele b şi c sunt invers proporţionale cu numerele $0,(3)$, respectiv $0,1(6)$ se transcrie în relaţia $\frac{b}{0,1(6)} = \frac{c}{0,(3)}$ sau folosind rezultatul punctului (a) avem $\frac{b}{\frac{1}{6}} = \frac{c}{\frac{1}{3}}$ ceea ce revine la $c = 2b \quad (2)$. Folosind (1) şi (2) avem $a^2 + b^2 + c^2 = (2b)^2 + b^2 + (2b)^2 = 4b^2 + b^2 + 4b^2 = 9b^2$. Relaţia din ipoteză $a^2 + b^2 + c^2 = 81$ revine la $9b^2 = 81$ sau $b^2 = 9$, de unde $\boxed{b = 3}$. Pentru $b = 3$ obţinem $\boxed{a = c = 6}$.

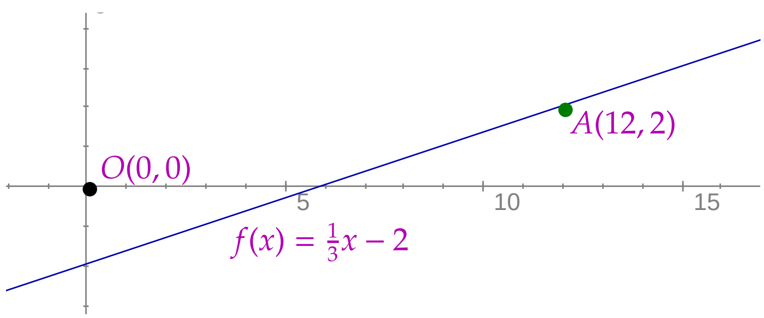

Figura . Exerciţiul 14.

14. a.

b. Cum $A(m, 2)$ aparţine graficului funcţiei f avem că $f(m) = 2$. Aceasta revine la $\frac{m}{3} - 2 = 2$ sau $m - 6 = 6$, de unde $m = \boxed{12}$

c. $f(b) - f(a) + 2 \cdot f\left(\frac{a-b}{2}\right) = \frac{b}{3} - 2 - (\frac{a}{3} - 2) + 2 \cdot \left(\frac{\frac{a-b}{2}}{3} - 2\right) = \frac{b}{3} - 2 - \frac{a}{3} + 2 + \frac{a-b}{3} - 4 = \frac{b-a+a-b}{3} - 4 = -4$

15. a.

b. $[ACD'B']$ este un tetraedru regulat. Într-adevăr feţele tetraedrului sunt triunghiuri echilaterale congruente cu latura egală cu diagonala unei feţe a cubului, deci de lungime $4\sqrt{2}$. Prin urmare aria totală a lui $[ACD'B']$

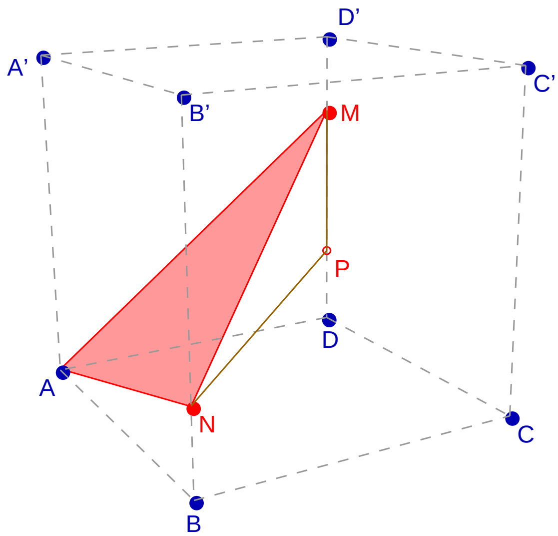

FIGURA . Exercițiul 15.

este egală cu $4 \cdot \mathcal{A}_{AD'C} = 4 \cdot \dfrac{AD' \cdot D'C \cdot \sin 60^\circ}{2} = 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{32\sqrt{3}}\ cm^2$

c. Fie P proiecția lui N pe DD'. Avem $MP = DD' - DP - D'M = 4 - 1 - 1 = 2$ și $NP = BD = 4\sqrt{2}$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic MPN avem $MN = \sqrt{MP^2 + PN^2} = \sqrt{2^2 + (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{4 + 16 \cdot 2} = \sqrt{36} = \boxed{6}\ cm$.

d. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul ABN avem: $AN = \sqrt{AB^2 + BN^2} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$. Similar, în triughiul ADM avem: $AM = \sqrt{AD^2 + DM^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$. Fie R proiecția lui A pe MN. În triunghiul dreptunghic ARN conform teoremei lui Pitagora avem: $AR^2 = AN^2 - NR^2 = 17 - NR^2 \quad (1)$. Similar, în triunghiul dreptunghic ARM avem $AR^2 = AM^2 - MH^2 = 25 - (6 - NR^2)^2 \quad (2)$. Egalând relațiile (1) și (2) obținem $17 - NR^2 = 25 - (6 - NR^2)^2$ ceea ce este echivalent cu $17 - NR^2 = 25 - 36 + 12NR - NR^2$ sau $12NR = 17 + 11$, de unde $NR = \dfrac{28}{12} = \dfrac{7}{3}$. Înlocuind în (1) obținem $AR^2 = 17 - \left(\dfrac{7}{3}\right)^2 = 17 - \dfrac{49}{9} = \dfrac{153 - 49}{9} = \dfrac{104}{9} = \dfrac{2\sqrt{26}}{3}$.

Prin urmare $\mathcal{A}_{ANM} = \dfrac{AR \cdot MN}{2} = \dfrac{\frac{2\sqrt{26}}{3} \cdot 6}{2} = \boxed{2\sqrt{26}}\ cm^2$.

CAPITOLUL 5

Varianta 35.

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $16 : 2 = \boxed{8}$.
2. $8^2 = 64$, deci rădăcina pătrată a numărului 64 este $\boxed{8}$.
3. Cel mai mare divizor comun al numerelor $12 = 2^2 \cdot 3$ şi $18 = 2 \cdot 3^2$ este $2 \cdot 3 = \boxed{6}$.
4. Singurul element comun al celor două mulţimi este 2, deci $A \cap B = \boxed{\{2\}}$.
5. Linia mijlocie în triunghi este egală cu jumătate din lungimea laturii corespunzătoare. Cum lungimile laturilor mijlocii sunt $3\ cm$, $5\ cm$ şi $6\ cm$, lungimile laturilor triunghiului vor fi $6\ cm$, $10\ cm$ şi $12\ cm$, iar perimetrul triunghiului este egal cu $6 + 10 + 12 = \boxed{28}$ cm.
6. Diagonala pătratului de latură $5\ cm$ este $\boxed{5\sqrt{2}}\ cm$.
7. Aria laterală a cilindrului este $2\pi rg = 2\pi \cdot 3 \cdot 4 = \boxed{24}\pi\ \mathrm{cm}^2$.
8. $V_{\text{piramidă}} = \frac{1}{3} \cdot A_{bazei} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot 9 = \boxed{12}\ cm^3$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{B}$: $2\sqrt{3} - 3\sqrt{12} + \sqrt{27} = 2\sqrt{3} - 3 \cdot 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = -\sqrt{3}$.
10. $\boxed{A}$: $\frac{x^2 - 9}{x^2 + 6x + 9} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)^2} = \frac{x-3}{x+3}$.
11. $\boxed{D}$: Fie L lungimea dreptunghiului, iar l lăţimea dreptunghiului. Din ipoteză avem $L = l + 7$. Ştiind că $P = 2(L + l)$ avem $50 = 2(l + 7 + l)$ ceea ce revine la $50 = 4l + 14$ sau $4l = 50 - 14$. Deci $l = \frac{36}{4} = 9$, iar $L = l + 7 = 9 + 7 = 16\ cm$.
12. $\boxed{D}$: $2 \cdot \cos 30^\circ + 2\sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} + 3$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Fie p preţul iniţial al obiectului. După majorarea cu 15% preţul devine $p_1 = p + \frac{15}{100}p = p + \frac{3}{20}p = \frac{23}{20}p$. După micşorarea preţului cu 15% preţul

obiectului devine $p_1 - \frac{15}{100}p_1 = p_1 - \frac{3}{20}p_1 = \frac{17}{20}p_1 = \frac{17}{20}\cdot\frac{23}{20}p = \frac{391}{400}p$. Prin urmare $\frac{391}{400}p = 195,5$ echivalent cu $\frac{391}{400}p = \frac{1955}{10}$ sau $\frac{391}{400}p = \frac{391}{2}$ şi simplificând cu 391 obţinem $\frac{1}{400}p = \frac{1}{2}$. Avem deci $p = \frac{400}{2} = \boxed{200}$.

b. Conform notaţiilor de la punctul precedent, preţul după majorare este $p_1 = \frac{23}{20}\cdot 200 = \boxed{230}$.

14. a. $A(1,2)$ aparţine reprezentării grafice a funcţiei f dacă $f(1) = 2$. Într-adevăr, $f(1) = (2-\sqrt{5})\cdot 1 + \sqrt{5} = 2$, deci A aparţine graficului funţiei f.

b. $f(x) - 2 \geq 0$ este echivalentă cu $(2-\sqrt{5})x + \sqrt{5} - 2 \geq 0$ sau $(2-\sqrt{5})x \geq 2-\sqrt{5}$. Cum $2-\sqrt{5} < 0$, împărţind inecuaţia cu $2-\sqrt{5} < 0$ obţinem $x \leq 1$ sau $x \in \boxed{(-\infty, 1]}$.

c. Egalitatea $f(a) = b + b\sqrt{5}$ este echivalentă cu $(2-\sqrt{5})a + \sqrt{5} = b + b\cdot\sqrt{5}$ sau cu $2a + (1-a)\sqrt{5} = b + b\cdot\sqrt{5}$. Aceasta se mai poate scrie $2a - b = \sqrt{5}(b + a - 1)$. Dacă $b + a - 1 \neq 0$, atunci (cum $a, b \in \mathbb{Q}$) de aici rezultă $\sqrt{5} = \frac{2a-b}{b+a-1} \in \mathbb{Q}$. Contradicţie. Deci se impune $b + a - 1 = 0$, ceea ce implică şi $2a - b = 0$. Adunând ecuaţiile, avem $3a = 1$, de unde $a = \boxed{\frac{1}{3}}$, iar $b = 2a = \boxed{\frac{2}{3}}$.

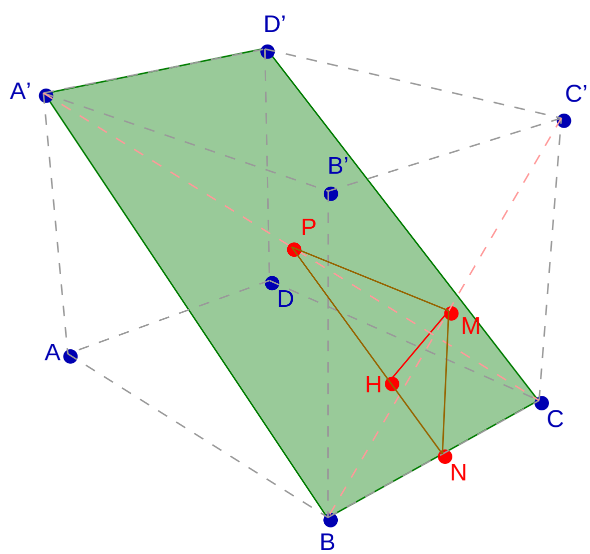

FIGURA . Exerciţiul 15.

15. a.

b. Din $BC \perp (ABB'A')$ şi $A'B \subset (ABB'A')$ rezultă că $BC \perp A'B$. În triunghiul dreptunghic $A'BC$ avem $\operatorname{tg}\widehat{BA'C} = \frac{BC}{A'B}$ sau $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{6}{A'B}$. De aici $A'B = \frac{18}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$. În triunghiul dreptunghic $A'AB$ conform teoremei lui Pitagora avem $AA' = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 - (6\sqrt{2})^2} = \sqrt{6^2 \cdot 3 - 6^2 \cdot 2} = \sqrt{6^2} = \boxed{6}$

c. Observăm că feţele $ABCD, A'B'C'D', ABB'A', DCC'D'$ sunt congruente (dreptunghiuri cu aceleaşi lungimi de laturi). Deasemenea, $BCC'B'$ este congruent cu $ADD'A'$. Prin urmare, $A_t = 2A_{BCC'B'} + 4A_{ABCD} = 2 \cdot 6 \cdot 6 + 4 \cdot 6 \cdot 6\sqrt{2} = \boxed{72 + 144\sqrt{2}}$.

d. Fie M centrul feţei $BCC'B'$, N mijlocul lui BC şi P mijlocul lui $A'C$. MN este linie mijlocie în triunghiul BCC', deci $MN \| CC'$ şi are lungimea egală cu $\frac{CC'}{2} = \frac{6}{2} = 3$. PN este linie mijlocie în triunghiul $A'BC$, deci $PN \| A'B$ şi are lungimea egală cu $\frac{A'B}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$. Construim $MH \perp PN$. Din $MH \perp PN$, $PN \subset (A'BC)$, $PN \perp BC$, $MN \perp BC$ şi $BC \subset (A'BC)$ rezultă conform reciprocei teoremei celor trei perpendiculare că $MH \perp (A'BC)$. Prin urmare distanţa căutată este MH.
Demonstrăm că triunghiul MNP este dreptunghic. Într-adevăr, cum P este mijlocul lui $A'C$, este şi mijlocul lui BD' ($A'C$ şi BD' sunt diagonale în dreptunghiul $BCD'A'$. Deci, MP este linie mijlocie în triunghiul $BC'D'$, de unde $MP \| D'C'$ şi $MP = \frac{C'D'}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$. Din $MP \| D'C'$ şi $D'C' \perp (BCC'B')$, rezultă că $PM \perp (BCC'B')$, deci PM perpendiculară pe orice dreaptă din planul $(BCC'B')$. In particular, $PM \perp MN$. Prin urmare, triunghiul NMP este dreptunghic şi avem: $MH = \frac{MP \cdot MN}{NP} = \frac{3\sqrt{2} \cdot 3}{3\sqrt{3}} = \boxed{\sqrt{6}}$.

Pro Didactica vă urează succes la examen.
De la toamnă vă aşteptăm cu întrebări din materia de liceu.