BAC 2007

Pro–Didactica

Testare Naţională

Rezolvările variantelor 21–25

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

Cuprins

CAPITOLUL 1

Varianta 21

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $(64:8)+9=8+9=\boxed{17}$
2. $2x=7+1$, deci $x=\frac{8}{2}=\boxed{4}$.
3. Probabilitatea va fi egală cu numărul de bile negre împărţit la numărul total de bile, adică $\frac{11}{11+18}=\boxed{\frac{11}{29}}$.
4. 20% din 25 se calculează $\frac{20}{100}\cdot 25=\frac{1}{5}\cdot 25=\boxed{5}$ fete.
5. Linia mijlocie a trapezului este $\frac{24+12}{2}=\boxed{18}$.
6. Într-un paralelogram, suma a două unghiuri alăturate este de $180°$. Deci $\widehat{ABC}=180°-\widehat{BAD}=180°-36°=\boxed{144°}$
7. Lungimea cercului este $2\pi r$, unde r este raza. Deci, $12\pi=2\pi r$, de unde $r=\frac{12\pi}{2\pi}=\boxed{6}$ cm.
8. Folosind formula $V_{\text{con}}=\frac{\pi\cdot r^2\cdot h}{3}$, obţinem: $V=\frac{\pi\cdot 2^2\cdot 4}{3}=\boxed{\frac{16}{3}}\pi\,\text{cm}^3$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{B}$: Mai întâi să observăm că $a=\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}=1+\sqrt{2}$. Pe de altă parte $b=|1-\sqrt{2}|=\sqrt{2}-1$, căci $\sqrt{2}>1$. Media geometrică a numerelor a şi b este
$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\sqrt{(\sqrt{2})^2-1^2}=\sqrt{2-1}=\boxed{1}$$
10. $\boxed{B}$: Rezolvăm prima ecuaţie.
Desfiinţând parantezele avem $3x+9-2x-10=4$, sau $x-1=4$, de unde obţinem $x=5$.
Înlocuindu-l pe x în a doua ecuaţie, îl aflăm pe a. După substituirea lui x avem $5a+4=a$, de unde rezultă $a=-1$.
11. $\boxed{C}$: Simetricul punctului $M(3,4)$ faţă de origine este punctul $M'(-3,-4)$.

12. $\boxed{D}$: Aplicând teorema lui Pitagora, obţinem valoarea ipotenuzei: $BC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$, deci $BC = 10$. Atunci

$$\sin\widehat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{10}$$
$$\sin\widehat{C} = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{10}$$

Deci $\sin\widehat{B} + \sin\widehat{C} = \frac{6}{10} + \frac{8}{10} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Două caiete şi două cărţi vor costa

$$2 \cdot 1,8 + 2 \cdot 6 = 3,6 + 12 = 15,6 \text{ lei}$$

Restul primit de la 50 lei este $50 - 15,6 = \boxed{34,4}$ lei.

b. Cum coletul conţine în total 10 bucăţi, dintre care cel puţin 3 caiete şi cel puţin 2 cărţi, preţul minim se obţine când avem 8 caiete şi 2 cărţi şi va fi: $8 \cdot 1,8 + 2 \cdot 6 = 14,4 + 12 = \boxed{26,4}$ lei.

14. a. Ecuaţia $1 - 9x^2 = 0$ se rescrie $9x^2 = 1$ sau $x^2 = \frac{1}{9}$, de unde $x_1 = \boxed{\frac{1}{3}}$ şi $x_2 = \boxed{-\frac{1}{3}}$.

b. $(x + 1)(1 - 3x) = x - 3x^2 + 1 - 3x = 1 - 2x - 3x^2$

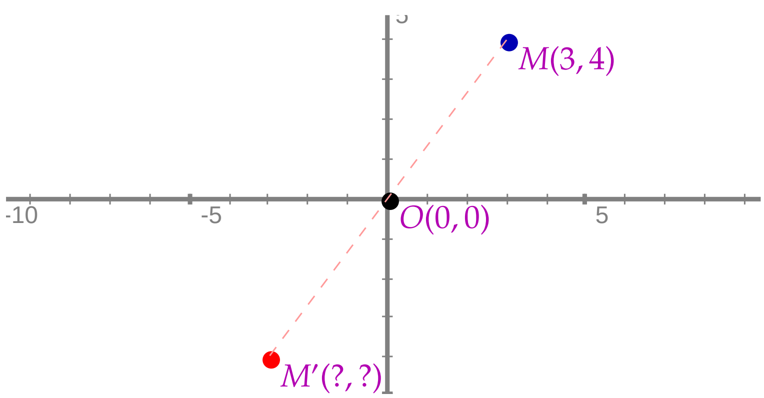

Figura 1. Exerciţiul 11.

c.

$$\begin{aligned}
E(x) &= \frac{7x-3x^2}{1-9x^2} - \frac{3x}{1-2x-3x^2}\cdot\left(1+\frac{3x+x^2}{x+3}\right)\\
&= \frac{7x-3x^2}{(1-3x)(1+3x)} - \frac{3x}{(x+1)(1-3x)}\cdot\left(1+\frac{x(x+3)}{x+3}\right)\\
&= \frac{7x-3x^2}{(1-3x)(1+3x)} - \frac{3x}{(x+1)(1-3x)}\cdot(1+x)\\
&= \frac{7x-3x^2}{(1-3x)(1+3x)} - \frac{3x}{(1-3x)}\\
&= \frac{7x-3x^2}{(1-3x)(1+3x)} - \frac{3x(1+3x)}{(1-3x)(1+3x)}\\
&= \frac{7x-3x^2-3x-9x^2}{(1-3x)(1+3x)} = \frac{4x-12x^2}{(1-3x)(1+3x)}\\
&= \frac{4x(1-3x)}{(1-3x)(1+3x)} = \frac{4x}{1+3x}
\end{aligned}$$

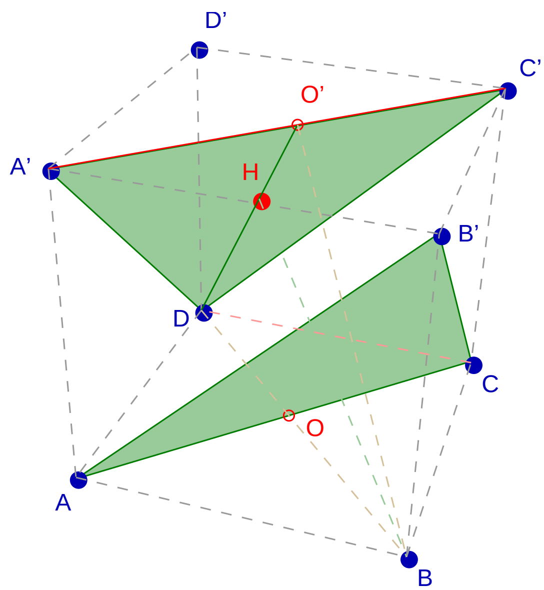

FIGURA 2. Exercițiul 15.

15. a.

b. Cum
- avem perechile de drepte paralele $AC \| A'C'$, $A'D \| B'C$
- AC şi $B'C$ sunt în planul (ACB')
- $A'C'$ şi $A'D$ sunt în planul $(A'C'D)$

rezultă că $(ACB') \| (A'C'D)$.

c. Cum $A'C' \| AC$, unghiul dintre CD şi $A'C'$ este unghiul ACD care are măsura $45°$.

d. Fie O intersecţia diagonalelor în pătratul $ABCD$, iar O' intersecţia diagonalelor în pătratul $A'B'C'D'$. Fie H piciorul perpendicularei din B pe DO'. Observăm că $BO' \perp A'C'$ şi $DO' \perp A'C'$, deci $A'C' \perp (BDO')$. In particular $A'C' \perp BH$. Cum $BH \perp DO'$, rezultă că $BH \perp (DA'C')$.
Triunghiul $DO'B$ este isoscel cu $DO' = BO'$. Din triunghiul dreptunghic $\Delta DD'O'$, avem

$$DO' = \sqrt{D'D^2 + D'O'^2} = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{6}$$

Aria triunghiului $\Delta BO'D$ poate fi calculată în două moduri ceea ce conduce la $\frac{BH \cdot DO'}{2} = \frac{OO' \cdot BD}{2}$, sau $BH \cdot 2\sqrt{6} = 4 \cdot 4\sqrt{2}$, de unde $BH = \boxed{\frac{8\sqrt{3}}{3}}$

CAPITOLUL 2

Varianta 22

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $1035 : 5 = \boxed{207}$.
2. $A \cap B = \boxed{\{-1, 0\}}$.
3. Numerele mai mici sau egale cu 4 de pe un zar sunt $1, 2, 3, 4$. Probabilitate să iasă unul din aceste 4 numere este $\frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3}}$.
4. Avem $3\sqrt{3} - \sqrt{27} = 3\sqrt{3} - \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = \boxed{0}$.
5. Suma celor două unghiuri ascuţite ale unui triunghi dreptunghic este de $90°$, deci celălalt unghi va măsura $90° - 47° = \boxed{43°}$.
6. Linia mijlocie a trapezului este egală cu semisuma bazelor, adică $\frac{15+7}{2} = \boxed{11}$ cm.
7. $V_{cub} = l^3 = 3^3 = \boxed{27}\,\text{cm}^3$.
8. Cum perimetrul este 40, deducem că latura bazei este 10. Avem deci $A_{\text{laterală}} = 4\frac{10 \cdot 10}{2} = \boxed{200}$. La acelaşi rezultat se ajunge şi folosind formula $A_{\text{laterală}} = \frac{\text{apotema} \cdot \text{perimetrul bazei}}{2}$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{A}$: Cum $124 = 4 \cdot 31$, numărul 31 este un divizor al lui 124 cuprins între 20 şi 50.
10. $\boxed{C}$: $BC = 3$ iar $AC = 2$, de unde $\frac{BC}{AC} = \frac{3}{2} = 1,5$.
11. $\boxed{B}$: Dacă rombul are un unghi de $60°$, diagonala mică separă rombul în două triunghiuri echilaterale, fiecare de latură l egală cu diagonala mică ($l = 12$ cm). Aria rombului este de două ori aria unui triunghi echilateral de latură 12, adică $2\frac{12 \cdot 12 \cdot \sin 60°}{2} = 144\frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{72\sqrt{3}}$.
12. $\boxed{C}$: Oriunde ar fi punctul M situat pe CD, aria triunghiului AMB este aceeaşi şi anume $\frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = \boxed{12}\,\text{cm}^2$, căci înălţimea va fi egală cu BC.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Să notăm vârsta Danei (şi a Oanei) cu d. Avem că $d + d + 12 = 26$, de unde $2d = 14$, deci $d = \boxed{7}$.
b. Notăm cu x numărul de ani în urmă când vârsta lui Vlad era egală cu suma vârstelor Danei şi Oanei. Prin urmare acum x ani Vlad avea $12 - x$ ani, iar Dana $7 - x$. Avem deci relaţia $12 - x = (7 - x) + (7 - x)$ sau $12 - x = 14 - 2x$, de unde $x = \boxed{2}$.

14. a. Folosind formula $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, avem $E(x) = (2x + 1 + x - 1)(2x + 1 - x + 1) + x^2 - 4 - 3x^2 + 14 = 3x(x + 2) - 2x^2 + 10 = x^2 + 6x + 10$.
b. $E(-3) = (-3)^2 + 6 \cdot (-3) + 10 = 9 - 18 + 10 = \boxed{1}$
c. Avem $E(a) = a^2 + 6a + 10 = (a^2 + 6a + 9) + 1 = (a + 3)^2 + 1 \geq 1 > 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

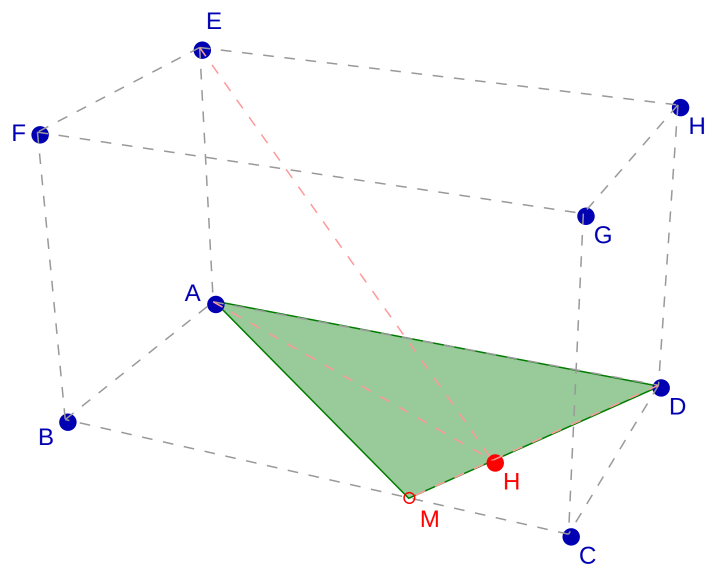

FIGURA 1. Exerciţiul 15.

15. a.
b.

$$\begin{aligned} A_t &= 2A_{bazei} + 2A_{ABFE} + 2A_{BCGF} \\ &= 2 \cdot AB \cdot BC + 2 \cdot AB \cdot BF + 2 \cdot BC \cdot CG \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} \\ &= 8\sqrt{3} + 8 + 8\sqrt{3} = \boxed{8 + 16\sqrt{3}} \end{aligned}$$

c. Cum $EA \perp (ABCD)$, $AB \perp BC$ şi $BC \subset (ABCD)$ conform teoremei celor trei perpendiculare rezultă $EB \perp BC$. Din $EB \perp BC$ şi $AB \perp BC$ avem că unghiul dintre (EBC) şi (ABC) este $\widehat{ABE}$, iar măsura lui este $\boxed{45^\circ}$, căci triunghiul ΔEAB este dreptunghic isoscel.

d. Fie H piciorul perpendicularei din A pe DM. Cum $EA \perp (ABCD)$, $AH \perp DM$ şi cum DM este în planul $(ABCD)$, conform teoremei celor trei perpendiculare, rezultă că $EH \perp DM$. Trebuie să aflăm deci lungimea segmentului EH.

Din triunghiul dreptunghic DCM conform teoremei lui Pitagora, $DM = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

Calculăm aria triunghiului MAD (propunătorul ştie oare engleza?) în două moduri. Pe de o parte ţinând cont de faptul că înăţimea din M pe AD este egală cu $AB = 2$, avem $Aria_{\Delta MAD} = \dfrac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$. Pe de altă parte, $Aria_{\Delta MAD} = \dfrac{AH \cdot DM}{2} = \dfrac{\sqrt{5} \cdot AH}{2}$. Rezolvând ecuaţia $2\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{5} \cdot AH}{2}$, obţinem $AH = \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ (nu are sens să raţionalizăm numitorul; ne va fi mai uşor aşa).

In fine în triunghiul dreptunghic EAH, teorema lui Pitagora conduce la $EH = \sqrt{2^2 + \left(\dfrac{4\sqrt{3}}{5}\right)} = \sqrt{4 + \dfrac{48}{5}} = \sqrt{\dfrac{68}{5}} = \boxed{\dfrac{2\sqrt{17}}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{85}}{5}}$.

CAPITOLUL 3

Varianta 23

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $\boxed{3.583.000}$
2. $\boxed{6}$ numere întregi: $-3, -2, -1, 0, 1, 2$.
3. $\frac{1}{4} \cdot 200 = \frac{200}{4} = \boxed{50}$.
4. Pe zar există 3 numere mai mici decât 4 şi anume 1, 2 şi 3. Probabilitatea să cadă unul dintre ele este $\frac{3}{6} = \boxed{\frac{1}{2}}$.
5. Într-unul din cele două triunghiuri dreptunghice în care înălţimea împarte triunghiul echilateral avem $\sin 60 = \frac{h}{l}$, deci $l = \frac{h}{\sin 60} = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{24}{\sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{3}}{3} = \boxed{8\sqrt{3}}$.
6. $P = 2 \cdot L + 2 \cdot l = 2 \cdot 10 + 2 \cdot 11 = \boxed{42}$ cm.
7. $V_{con} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$, de unde $h = \frac{3V}{\pi \cdot r^2} = \frac{36 \cdot 3}{\pi \cdot 6^2} = \boxed{3}$ cm
8. Cubul are 6 feţe, deci $A_{cub} = 6l^2 = 6 \cdot 10^2 = \boxed{600}\,\text{cm}^2$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{B}$: Din relaţiile lui Viète ştim $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-9}{9} = \boxed{1}$.
10. $\boxed{D}$: Valorile pe care le ia f sunt $f(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$, $f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ şi $f(4) = 2 \cdot 4 + 1 = 9$.
11. $\boxed{C}$: Unghiul ABC este unghi înscris în cerc şi are măsura egală cu jumătate din măsura arcului AC, care este $180°$. Deci măsura unghiului ABC este $\frac{180°}{2} = \boxed{90°}$.
12. $\boxed{B}$: $E = \sin 30° + \cos(90° - 30°) = \sin 30° + \cos 60° = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Cum cel mai mare număr este divizibil cu 10, el este de forma $10k$ cu $k \in \mathbb{N}$, iar câtul împărţirii lui la 5 este $2k$. Similar, cum cel mai mic număr multiplu de 6 el are forma $6p$, cu $p \in \mathbb{N}$, iar câtul împărţirii la 6 este $2p$. Avem deci relaţiile: $10k - 6p = 120$ şi $2k = 2p + 20$, care după împărţire la 2 se rescriu: $5k - 3p = 60$ şi $k = p + 10$. Inlocuind k în prima relaţie obţinem: $5p + 50 - 3p = 60$, de unde $p = 5$ ceea ce conduce la $k = 15$. Deci numărul mai mare este $\boxed{150}$.

b. Numerele fiind 150 şi 30, numărul mic reprezintă $\dfrac{30}{150} = \dfrac{1}{5} = 0,2 = \boxed{20\%}$ din cel mare.

14. a. $\dfrac{2x+6}{x^2+4x+3} = \dfrac{2(x+3)}{x^2+3x+x+3} = \dfrac{2(x+3)}{x(x+3)+(x+3)} = \dfrac{2(x+3)}{(x+3)(x+1)} = \dfrac{2}{x+1}$.

b. Conform punctului precedent $\dfrac{2a+6}{a^2+4a+3} = \dfrac{2}{a+1}$. Pentru ca $\dfrac{2}{a+1}$ să fie număr întreg, $a+1$ trebuie să fie divizor al lui 2, adică $a+1 \in \{-2,-1,1,2\}$. Deducem $a \in \{-3,-2,0,1\}$ şi cum $a \in \mathbb{Z} \setminus \{-3,-1\}$, avem $\boxed{a \in \{-2,0\}}$.

c. Avem

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{4}{x-1} + \frac{13-5x}{1-x^2} - \frac{2x+6}{x^2+4x+3}\right) : \frac{1}{x+1} \\
\overset{(a)}{=} &\left(\frac{4}{x-1} + \frac{13-5x}{(1-x)(1+x)} - \frac{2}{x+1}\right) \cdot (x+1) \\
= &\frac{4(x+1)-(13-5x)-2(x-1)}{(x-1)(x+1)} \cdot (x+1) \\
= &\frac{4x+4-13+5x-2x+2}{x-1} = \frac{7(x-1)}{x-1} = 7
\end{aligned}$$

15. a.

b. Fie $O'O$ înălţimea trunchiului de piramidă şi P piciorul perpendicularei din A' pe AC. Avem $A'P = O'O$. Unghiul dintre AA' şi planul (ABC) este $\widehat{A'AP}$ şi conform ipotezei are măsura $45°$. In triunghiul dreptunghic $A'PA$ avem: $\sin\widehat{A'AP} = \dfrac{A'P}{AA'}$, echivalent cu $\sin 45° = \dfrac{A'P}{6}$, de unde $A'P = 6\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$. Deci $O'O = \boxed{3\sqrt{2}}$.

c. $V_{\text{trunchi piramidă}} = \dfrac{h}{3}(A_B + A_b + \sqrt{A_B A_b})$, unde h este înălţimea trunchiului de piramidă, A_B aria bazei mari şi A_b aria bazei mici. Pentru a calcula A_B avem nevoie de lungimea laturii bazei mari. Triunghiul $A'PA$ este dreptunghic isoscel, deci $AP = 3\sqrt{2}$. Atunci $AC = 2AP + A'C = 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$ şi deci $AB = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = 12$. Prin urmare $V_{\text{trunchi piramidă}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{3}(12^2 + 6^2 + \sqrt{144\cdot 36}) = \sqrt{2}(144+36+12\cdot 6) = \boxed{252\sqrt{2}}$.

d. Cum $A'C' = AO = 6\sqrt{2}$ şi $A'C' \| AO$ rezultă că $AOC'A'$ este paralelogram. Cum $AA' \| OC'$, unghiul dintre AA' şi BC' este unghiul $BC'O$. Din $DC' = BC'$ (fetele laterale sunt congruente) rezultă că triunghiul $BC'D$ este isoscel. Punctul O este mijlocul lui BD, deci $C'O \perp BD$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic BOC' avem: $BC' = \sqrt{BO^2 + OC'^2} = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 + 6^2} = \sqrt{36 \cdot 2 + 36} = 6\sqrt{3}$, iar $\sin \widehat{BC'O} = \frac{6\sqrt{2}}{6\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}}$.

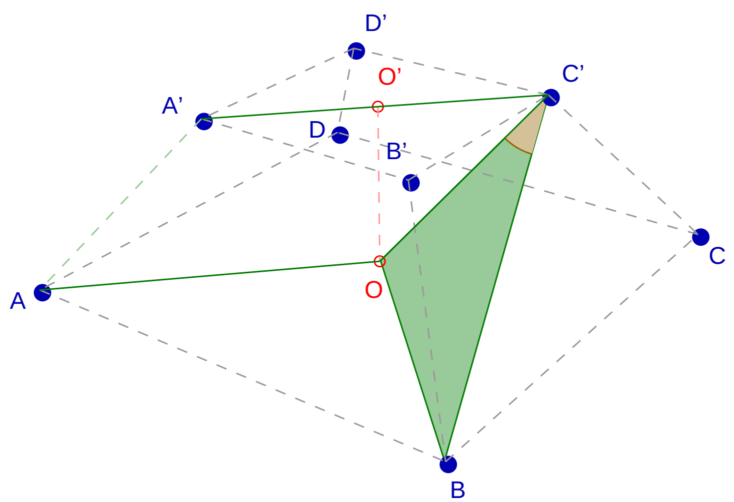

FIGURA 1. Exerciţiul 15.

CAPITOLUL 4

Varianta 24

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $3^2 - 2 = 9 - 2 = \boxed{7}$.
2. $\boxed{998}$.
3. $\frac{2}{3} \cdot 900 = \boxed{600}$.
4. $A - B = \boxed{\{-3\}}$
5. $L_{cerc} = 2\pi r = 12\pi$, deci $r = \boxed{6}$ cm.
6. Aria triunghiului dreptunghic este egală cu semiprodusul catetelor, deci $A = \dfrac{6 \cdot 8}{2} = \boxed{24}\,\mathrm{cm}^2$.
7. $V_{cub} = l^3 = 216 = 6^3$, deci $l = \boxed{6}\,\mathrm{cm}$.
8. $A_{\mathrm{lat}} = 2\pi RG = 2\pi \cdot 7 \cdot 9 = \boxed{126}\,\pi\,\mathrm{cm}^2$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{C}$: Folosind formula $1+2+3+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, avem $S = 4+5+6+...+100 = (1+2+3+4+...+100)-(1+2+3) = \dfrac{100 \cdot 101}{2} - 6 = 50 \cdot 101 - 6 = 5050 - 6 = 5044$.
10. $\boxed{B}$: Aducând cele două fracţii la numitor comun, obţinem
$$\frac{2-\sqrt{5}+2+\sqrt{5}}{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})} = \frac{4}{2^2-5} = -4$$
11. $\boxed{D}$: Se formează un triunghi dreptunghic în care ipotenuza este scara iar catetele sunt înălţimea clădirii şi distanţa de la scară la clădire. Aplicând teorema lui Pitagora în acest triunghi, obţinem distanţa: $d = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6\,\mathrm{m}$.
12. $\boxed{A}$: Fie D piciorul perpendicularei din A pe BC. De asemenea, să notăm cu O punctul în care bisectoarea unghiului $\widehat{C}$ intersectează înălţimea AD. Calculăm mai întâi : $\widehat{C} = 180° - \widehat{A} - \widehat{B} = 180° - 45° - 65° = 70°$. În triunghiul ODC, ştim $\widehat{OCD} = \frac{70}{2} = 35°$, iar $\widehat{ODC} = 90°$. Atunci
$$\widehat{DOC} = 180 - \widehat{ODC} - \widehat{OCD} = 180 - 90 - 35 = 55°$$

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Elevul a rezolvat corect 4 probleme şi incorect 6 probleme. Punctajul lui va fi $4 \cdot 5 - 6 \cdot 2 = 20 - 12 = \boxed{8}$.

b. Să notăm cu x numărul problemelor rezolvate corect şi cu y numărul problemelor rezolvate incorect. Numărul total de probleme este $x + y = 10$. Numărul de puncte obţinut de elev este $5x - 2y = 29$. Îl scoatem pe y din prima ecuaţie $y = 10 - x$ şi înlocuim în a doua ecuaţie: $5x - 2(10 - x) = 29$, deci $5x - 20 + 2x = 29$, de unde $x = 7$. Elevul a rezolvat corect $\boxed{7}$ probleme.

Comentariu: Substituind înapoi în oricare din ecuaţii găsim şi $y = 3$, dar această valoare nu ni se cere.

14. a. Avem

$$\begin{aligned}
E(x) &= \left(\frac{1}{x^2 - 2x} - \frac{1}{x^2 + 2x} + \frac{2}{x^2 - 4}\right) : \frac{2x + 6}{x^3 - 4x} \\
&= \left(\frac{1}{x(x-2)} - \frac{1}{x(x+2)} + \frac{2}{(x+2)(x-2)}\right) \cdot \frac{x(x^2-4)}{2(x+3)} \\
&= \frac{x + 2 - x + 2 + 2x}{x(x+2)(x-2)} \cdot \frac{x(x+2)(x-2)}{2(x+3)} \\
&= \frac{2x + 4}{2(x+3)} = \frac{x+2}{x+3}
\end{aligned}$$

b. Cum $|x + 3| \cdot |E(x)| = |x + 3| \cdot \dfrac{|x + 2|}{|x + 3|} = |x + 2|$, inecuaţia devine $|x + 2| < 4$, ceea ce este echivalent cu $-4 < x + 2 < 4$ sau $-6 < x < 2$. Soluţia inecuaţiei este:

$$x \in (-6, 2) \cap (\mathbb{Z} \setminus \{-3, -2, 0, 2\}) = \boxed{\{-5, -4, -1, 1\}}$$

(c) Să observăm mai întâi că scoţând întregii din fracţie avem $2E(a) = \dfrac{2a + 4}{a + 3} = \dfrac{2a + 6 - 2}{a + 3} = 2 - \dfrac{2}{a + 3}$. Pentru ca $2E(a)$ să fie întreg este necesar şi suficient ca $a + 3$ să fie divizor întreg al lui 2, adică $a + 3 \in \{-2, -1, 1, 2\}$. De aici $a \in \{-5, -4, -2, -1\}$, dar $a = -2$ nu este în domeniul de definiţie al lui E, deci în concluzie $\boxed{a \in \{-5, -4, -1\}}$.

15. a.

b. Cum $AB \| A'B'$ rezultă că triunghiurile $A'PB'$ şi BPA sunt asemenea. Avem deci: $\dfrac{A'P}{PB} = \dfrac{B'P}{AP} = \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{6}{18} = \dfrac{1}{3}$. Făcând proporţii derivate pornind de la $\frac{A'P}{PB} = \frac{1}{3}$, avem $\frac{A'P + PB}{PB} = \frac{1+3}{3}$ sau

$$\frac{A'B}{PB} = \frac{4}{3} \qquad (1)$$

Fie E piciorul perpendicularei din A' pe AB. Avem $AE = \frac{AB - A'B'}{2} = 6$, deci $EB = AB - AE = 12$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic $A'EB$ avem $A'B = \sqrt{AE^2 + EB^2} = \sqrt{12^2 + 12^2} = 12\sqrt{2}$. Înlocuind în relaţia (1) avem $PB = \frac{3A'B}{4} = \frac{3 \cdot 12\sqrt{2}}{4} = 9\sqrt{2}$. Perimetrul triunghiului isocel APB este $AP + PB + AB = 2PB + AB = \boxed{18\sqrt{2} + 18}$ cm.

c. Dacă OO' este înălţimea trunchiului de piramidă, atunci

$$V = \frac{OO'}{3}(\text{Aria}_{ABCD} + \text{Aria}_{A'B'C'D'} + \sqrt{\text{Aria}_{ABCD} \cdot \text{Aria}_{A'B'C'D'}})$$

Fie M piciorul perpendicularei din O pe BC, N piciorul perpendicularei din O' pe $B'C'$, iar Q piciorul perpendicularei din N pe OM. Avem $QM = OM - O'N = 9 - 3 = 6$. In triunghiul dreptunghic NQM conform teoremei lui Pitagora
$NQ = \sqrt{NM^2 - QM^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$

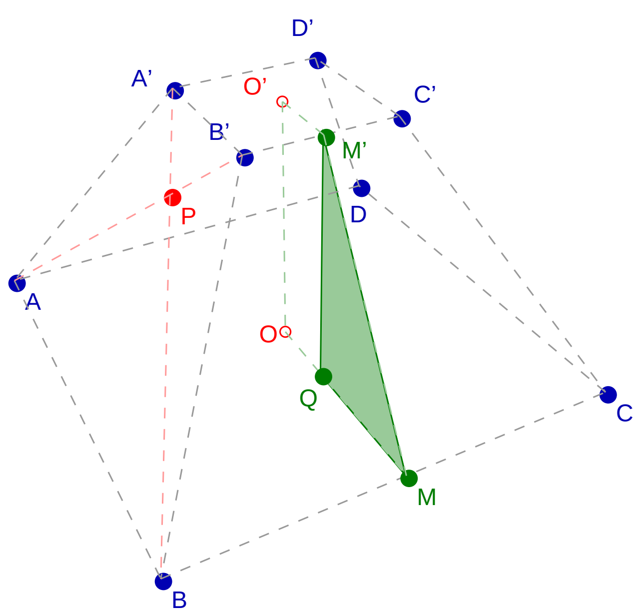

FIGURA 1. Exerciţiul 15.

Cum $NQ = OO'$ putem calcula acum volumul şi avem

$$\begin{aligned} V &= \frac{6\sqrt{3}}{3}(18^2 + 6^2 + 18 \cdot 6) \\ &= 2\sqrt{3} \cdot (324 + 36 + 108) \\ &= 2\sqrt{3} \cdot 468 = \boxed{936\sqrt{3}} \end{aligned}$$

d. Cum $OM \perp BC$ şi $NM \perp BC$, rezultă că unghiul dintre faţa laterală $(BCC'B')$ şi planul bazei $(ABCD)$ este $\widehat{QMN}$. În triunghiul dreptunghic MQN avem $\cos\widehat{QMN} = \frac{QM}{MN} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, de unde rezultă că măsura unghiului QMN este $\boxed{60^\circ}$.

CAPITOLUL 5

Varianta 25

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $40 - 6^2 = 40 - 36 = \boxed{4}$.
2. Numărul mai mic este $b = \boxed{7,45}$.
3. Un sfert de oră are $\frac{60}{4} = \boxed{15}$ minute.
4. Împărţim ambii membri ai ecuaţiei $5y = 3x$ cu $5x$. Obţinem $\frac{5y}{5x} = \frac{3x}{5x}$, şi, după simplificare, $\frac{y}{x} = \boxed{\frac{3}{5}}$.
5. Perimetrul unui hexagon regulat cu lungimea laturii l este $6 \cdot l$. In cazul de faţă obţinem $6 \cdot 8 = \boxed{48}$ cm.
6. $L_{cerc} = 2\pi r = 24\pi$, deci $r = \frac{24\pi}{2\pi} = \boxed{12}$ cm.
7. Aria totală a unui cub cu latura l este $A_t = 6 \cdot l^2$. In cazul de faţă obţinem $6 \cdot 5^2 = \boxed{150}\,\mathrm{dm}^2$.
8. Lungimea apotemei este $a = \sqrt{m^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$, unde m este lungimea muchiei laterale şi l lungimea muchiei bazei. Cu datele din exerciţiu $a = \sqrt{10^2 - \left(\frac{12}{2}\right)^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = \boxed{8}$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{C}$: Avem două inecuaţii.
   - Prima inecuaţie este $-3 \leq x - 1$, sau $x \geq -3 + 1$, echivalent cu $x \geq -2$ sau $x \in [-2, \infty)$.
   - A doua inecuaţie este $x - 1 \leq 0$, echivalent cu $x \leq 1$, sau $x \in (-\infty, 1]$.

   De aici $A = [-2, \infty) \cap (-\infty, 1] = [-2, 1]$.
10. $\boxed{D}$: Cum $M(2, y)$ aparţine graficului funcţiei f, avem $f(2) = y$. Deci $y = 2 \cdot 2 + 4 = 8$.
11. $\boxed{C}$: MN este linia mijlocie şi este egală cu jumătate din latura BC, iar AM şi AN sunt date ca fiind jumătate din AB, respectiv, AC. Deci, triunghiul AMN

are fiecare latură egală cu jumătate din laturile triunghiului ABC şi astfel are perimetrul
$P_{AMN} = \frac{P_{ABC}}{2} = \frac{120}{2} = 60$ cm.

12. $\boxed{B}$: $A_{PDC} = \frac{DC \cdot AM}{2} = \frac{10 \cdot 6}{2} = \frac{60}{2} = 30\,\text{cm}^2$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Din ipoteză $\frac{20}{100}a = \frac{80}{100}b$, sau după simplificare, $a = 4b$. De aici $b = \frac{a}{4} = \frac{25}{100}a$, deci b reprezintă 25% din numărul a.
b. Înlocuind $a = 4b$ în ecuaţia dată, obţinem: $(4b)^2 + b^2 = 17$, sau $16b^2 + b^2 = 17$, de unde $b^2 = 1$. Cum b este natural rezultă $\boxed{b = 1}$. Substituind, avem şi $a = 4b = \boxed{4}$.

14. a. Descompunând numitorii şi aducând la acelaşi numitor avem

$$\begin{aligned} E(x) &= \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{1-x} + \frac{2}{x^2-1}\right) \cdot \frac{x+1}{2} \\ &= \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x+1)(x-1)}\right) \cdot \frac{x+1}{2} \\ &= \frac{x-1+x+1+2}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{x+1}{2} \\ &= \frac{2(x+1)}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{x+1}{2} = \frac{x+1}{x-1} \end{aligned}$$

b. Scoţând întregii din fracţie avem
$E(x) = \frac{x+1}{x-1} = \frac{(x-1)+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$.
Pentru ca $E(x)$ să fie număr întreg este necesar şi suficient ca $x-1$ să fie printre divizorii lui 2, deci $x - 1 \in \{-2, -1, 1, 2\}$. De unde $x \in \{-1, 0, 2, 3\} \cap (\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}) = \boxed{\{0, 2, 3\}}$.

c. Calculăm

$$\begin{aligned} E(\sqrt{2}) &= \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} \\ &= \frac{2+2\sqrt{2}+1}{2-1} = \frac{3+2\sqrt{2}}{2-1} = 3+2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Avem $3 + 2\sqrt{2} = (a\sqrt{2} + b)^2$ sau $3 + 2\sqrt{2} = 2a^2 + 2ab\sqrt{2} + b^2$, de unde:

$$\begin{cases} 2a^2 + b^2 = 3 \\ 2ab = 2 \end{cases}$$

A doua ecuaţie din sistem se rescrie $ab = 1$ şi cum $a, b \in \mathbb{N}$, rezultă că $\boxed{a = b = 1}$, valori care verifică şi prima ecuaţie a sistemului: $2 \cdot 1^2 + 1^2 = 3$.

15. a.

b. Fie $AA'B'B$ un plan ce conţine înălţimea OO', unde A, B sunt puncte pe baza mare şi A', B' puncte pe baza mică. Construim $A'M \perp AB$ unde $M \in AB$. Unghiul dintre generatoarea trunchiului şi planul bazei este unghiul $\widehat{A'AM}$. În triunghiul dreptunghic $A'MA$ avem: $\cos \widehat{A'AM} = \frac{AM}{AA'} = \frac{30-15}{30} = \frac{1}{2}$, de unde $\widehat{A'AM} = \boxed{60°}$.

c. Fie V vârful conului din care provine trunchiul de con. Trebuie aflată înălţimea VO a conului. Cum $A'M \| VO$ (perpendiculare pe aceeaşi dreaptă) rezultă că triunghiurile AMA' şi AOV sunt asemenea. Deci: $\frac{A'M}{VO} = \frac{AM}{AO}$ sau $\frac{A'M}{VO} = \frac{15}{30}$ (1). In triunghiul dreptunghic AMA' conform teoremei lui Pitagora, avem $A'M = \sqrt{AA'^2 - AM^2} = \sqrt{900-225} = \sqrt{675} = 15\sqrt{3}$. Revenind la relaţia (1) avem: $\frac{15\sqrt{3}}{VO} = \frac{1}{2}$, de unde $VO = 30\sqrt{3}$. Prin urmare $V_{con} = \frac{\pi 30^2 \cdot 30\sqrt{3}}{3} = \boxed{9000\pi\sqrt{3}}$.

d. Lungimea sectorului de cerc ce reprezintă desfăşurarea suprafeţei laterale a conului este egală cu lungimea cercului de bază adică $2\pi \cdot 30 = 60\pi$. Raza sectorului de cerc este egală cu VA, generatoarea conului. În triunghiul dreptunghic VOA aplicând teorema lui Pitagora avem: $VA = \sqrt{VO^2 + AO^2} = \sqrt{900 \cdot 3 + 900} = 30\sqrt{4} = 60$. Lungimea totală a cercului de rază 60 este 120π, deci arcul de cerc având lungimea 60π, este de fapt un semicerc. Unghiul cerut are deci măsura $\boxed{180°}$.

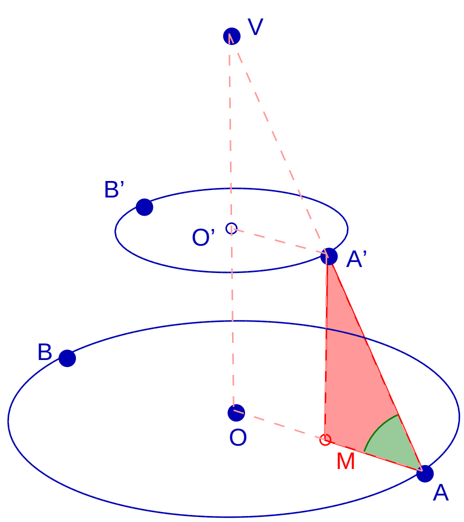

FIGURA 1. Exerciţiul 15.