BAC 2007

Pro–Didactica

Testare Naţională

Rezolvările variantelor 16–20

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

Cuprins

Capitolul 1. Varianta 16 3
1. Subiectul I. 3
2. Subiectul II. 4
3. Subiectul III. 4

Capitolul 2. Varianta 17 7
1. Subiectul I. 7
2. Subiectul II. 7
3. Subiectul III. 8

Capitolul 3. Varianta 18 11
1. Subiectul I. 11
2. Subiectul II. 11
3. Subiectul III. 12

Capitolul 4. Varianta 19 15
1. Subiectul I. 15
2. Subiectul II. 15
3. Subiectul III. 16

Capitolul 5. Varianta 20 19
1. Subiectul I. 19
2. Subiectul II. 19
3. Subiectul III. 20

CAPITOLUL 1

Varianta 16

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $2,35 \cdot 100 = \boxed{235}$.
2. Elementele comune ale acestor mulţimi sunt 3 şi 7, deci
$$A \cap B = \boxed{\{3,7\}}.$$
3. Probabilitatea de a extrage o bila albă este egală cu numărul de bile albe împărţit la numărul total de bile. Deci
$$p = \frac{10}{15+10} = \frac{10}{25} = \boxed{\tfrac{2}{5} = 40\%}$$
4. 20% din 1700 înseamnă
$$\frac{20}{100} \cdot 1700 = 20 \cdot 17 = \boxed{340}$$
5. $\text{Aria}_{\text{dreptunghiului}} = L \cdot l = 8\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} = \boxed{32}\,\text{cm}^2$
6. Hexagonul are 6 laturi, deci
$$\text{Perimetrul}_{\text{hexagon}} = 6 \cdot L = 6 \cdot 10\,\text{cm} = \boxed{60}\,\text{cm}$$
7. Să notăm cu d diagonala bazei paralelipipedului si cu D diagonala mare a paralelipipedului. Folosind teorema lui Pitagora d poate fi calculat din $d^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, deci $d = 5$cm. Acum, observăm că D este ipotenuza unui triunghi dreptunghic ale cărui catete sunt înălţimea paralelipipedului (dată în enunţ ca fiind 5 cm) şi, respectiv, diagonala d a bazei. Folosim din nou teorema lui Pitagora: $D^2 = d^2 + 5^2$. Dar d a fost determinat mai înainte ca fiind 5, deci $D = \sqrt{50} = \boxed{5\sqrt{2}}$.
8. Volumul conului este $\frac{1}{3}$ din produsul dintre aria bazei şi înălţime. Deci $V_{\text{con}} = \frac{A_{\text{bazei}} \cdot h}{3} = \frac{100\pi \cdot 6}{3} = \boxed{200\pi}$

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{D}$: Cu formula de calcul prescurtat $(a^2 - b^2) = (a+b)(a-b)$, deducem $a - b = \frac{a^2 - b^2}{a+b} = \frac{12}{3} = 4$.
10. $\boxed{B}$: Ştim că $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$. De asemenea ştim că $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$. Deci fracţia devine $\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(x-2)} = \frac{x+2}{x-2}$.
11. $\boxed{A}$: Aria trapezului este produsul dintre linia mijlocie şi înălţime, deci $10 \cdot 7\,\mathrm{cm}^2$ în cazul de faţă.
12. $\boxed{B}$: Rombul $ABCD$ are laturile AB şi AD egale, iar dacă unghiul $\widehat{BAD}$ are $60°$, atunci triunghiul ABD este echilateral. Deci $AB = BD = 12$cm şi perimetrul va fi $4 \cdot 12 = 48$cm.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Fie a numărul căutat. Ştim că $a - 13$ este multiplu de 15, $30 = 2 \cdot 15$ şi $45 = 3 \cdot 15$. Cel mai mic multiplu al acestor numere este $2 \cdot 3 \cdot 15 = 90$, deci $a - 13$ trebuie să fie multiplu de 90. Din $a - 13 = 90$ (cel mai mic), rezultă $a = \boxed{103}$.

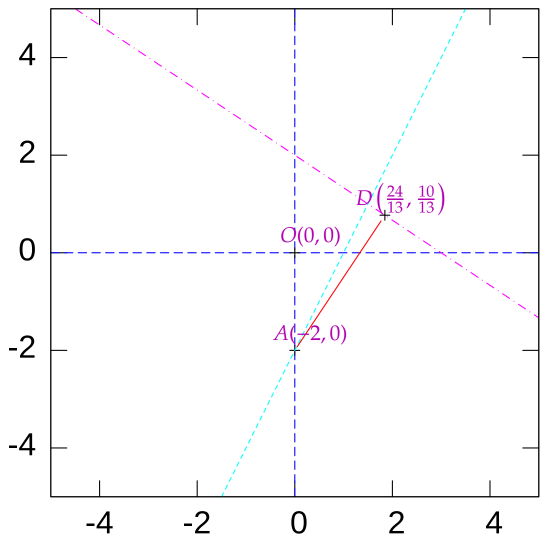
    b. Am văzut la punctul (a) că acestea sunt numere de forma $90k + 13$. Cel mic număr de 3 cifre de acest tip este 103, iar cel mai mare este $90 \cdot 10 + 13 = 913$, căci $90 \cdot 11 + 13 = 1013$ are 4 cifre. Suma căutată este

$$
\begin{aligned}
S &= (90 \cdot 1 + 13) + (90 \cdot 2 + 13) + \ldots + (90 \cdot 10 + 13) \\
&= 90 \cdot (1 + 2 + \ldots + 10) + 13 \cdot 10 \\
&= 90 \cdot 55 + 130 = \boxed{5080}
\end{aligned}
$$

14. a.

$$
\begin{aligned}
f(-3) + g(-3) &= [2 \cdot (-3) - 2] + \left[-\frac{2}{3}(-3) + 2\right] \\
&= -8 + 4 = \boxed{-4}
\end{aligned}
$$

    b. Figura este pe pagina următoare.



c. Graficul lui f intersectează axa ordonatelor în punctul $A(0, f(0))$, adică $A(0, -2)$. Graficul lui g intersectează axa ordonatelor în punctul $B(0, g(0))$, adică $B(0, 2)$. Tot graficul lui g intersectează axa absciselor în punctul $C(a, 0)$, unde a este soluţia ecuaţiei $g(a) = 0$. Această ecuaţie se rescrie $-\frac{2}{3}a + 2 = 0$, sau $-\frac{2}{3}a = -2$, de unde $a = 3$. Deci C are coordonatele $(3, 0)$. Fie D piciorul perpendicularei din A pe BC. Vom calcula aria triunghiului ABC în două moduri, cu baza BC şi înălţimea AD şi apoi cu baza BA şi înălţimea CO. Atunci

$$\frac{AD \cdot BC}{2} = \frac{CO \cdot AB}{2}.$$

De aici

$$AD = \frac{CO \cdot AB}{BC}$$

Ne mai lipseşte lungimea lui BC, dar o putem afla ca ipotenuză în triunghiul BOC, deci $BC = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$. Revenind în formula de mai sus, avem

$$AD = \frac{3 \cdot 4}{\sqrt{13}} = \boxed{\frac{12\sqrt{13}}{13}}$$

15. a. Vezi pagina următoare.

b. Aria bazei fiind $12^2 = 144$, volumul este $\frac{144 \cdot 6\sqrt{2}}{3} = \boxed{288\sqrt{2}}$.

c. Fie O intesecţia diagonalelor AC şi BD. Diagonala BD este $12\sqrt{2}$, deci $BO = 6\sqrt{2}$. Atunci din triunghiul dreptunghic SOB, aflăm muchia laterală $SB = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 + (6\sqrt{2})^2} = 12$. Feţele laterale SAB şi SBC sunt atunci triunghiuri echilaterale. Dacă M este mijlocul segmentului SB, atunci AM şi CM sunt perpendiculare pe SB şi unghiul dintre feţele laterale SAB şi SBC este $\widehat{AMC}$. Ne restângem atenţia la triunghiul isoscel AMC.

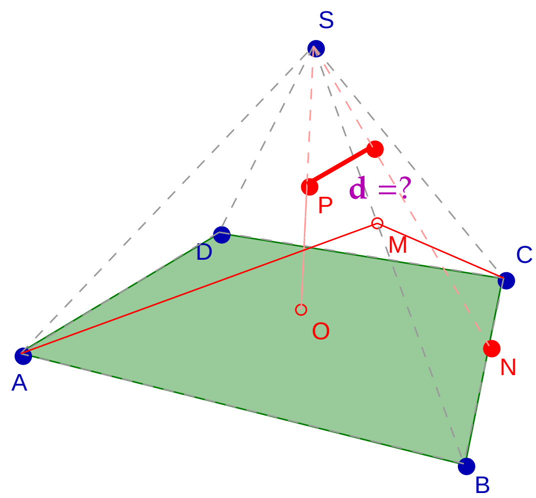


FIGURA 1. Exerciţiul 15.

Avem $AM = MC = 6\sqrt{3}$ ca înălţimi în triunghiuri echilaterale de latura 12 şi $AC = 12\sqrt{2}$, ca diagonală în pătratul de latură 12.
In triunghiul dreptunghic MOC avem

$$MO = \sqrt{MC^2 - OC^2} = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 - (6\sqrt{2})^2} = 6$$

Aria triunghiului AMC este $\dfrac{MO \cdot AC}{2} = \dfrac{6 \cdot 12\sqrt{2}}{2} = 36\sqrt{2}$. pe de altă parte însă aria poate fi exprimată şi sub forma $\dfrac{AM \cdot MC \cdot \sin\widehat{AMC}}{2} = \dfrac{(6\sqrt{3})^2 \sin\widehat{AMC}}{2} = 54 \cdot \sin\widehat{AMC}$. Din

$$36\sqrt{2} = 54 \cdot \sin\widehat{AMC}$$

deducem

$$\sin\widehat{AMC} = \boxed{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

d. Fie N mijlocul lui BC. In triunghiul dreptunghic SON cunoaştem $SO = 6\sqrt{2}$, $ON = 6$ şi $SN = 6\sqrt{3}$. Atunci înălţimea din O pe SN este $\dfrac{6 \cdot 6\sqrt{2}}{6\sqrt{3}} = 2\sqrt{6}$. Distanţa de la mijlocul înălţimii la planul SBC, care este jumătate din înălţimea din O pe SN, va fi $\dfrac{2\sqrt{6}}{2} = \boxed{\sqrt{6}}$.

CAPITOLUL 2

Varianta 17

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $281 + 29 = \boxed{310}$.
2. 25% din 200 este $\dfrac{25}{100} \cdot 200 = \boxed{50}$.
3. $2x = 7 - 5 = 2$ deci $x = \boxed{1}$.
4. 25 se divide cu 1, 5 si 25, deci are $\boxed{3}$ divizori naturali.
5. $2a + 5 - 2b = 2(a - b) + 5 = 2 \cdot 5 + 5 = 10 + 5 = \boxed{15}$.
6. Folosind formula $A_{\text{trapez}} = \dfrac{(B + b)h}{2}$, în cazul nostru aria este $A = \dfrac{(12 + 8) \cdot 6}{2} = \dfrac{20 \cdot 6}{2} = \boxed{60}$cm.
7. Când desfăşurăm cilindrul într-un dreptunghi, circumferinţa cercului de la bază devine lungimea dreptunghiului, iar generatoarea devine lăţimea. Deci aria laterală a cilindrului este exact aria dreptunghiului, adică $12\pi \cdot 8 = \boxed{96}\pi$ cm.
8. Cubul are 12 muchii a căror sumă este $12 \cdot 7 = \boxed{84}$ cm.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{B}$: Avem $\dfrac{3}{4} + \dfrac{7}{10} \cdot \dfrac{5}{14} = \dfrac{3}{4} + \dfrac{7}{2 \cdot 5} \cdot \dfrac{5}{2 \cdot 7} = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} = \boxed{1}$.
10. $\boxed{C}$: Folosind formula de calcul prescurtat $a^2 - b^2 = (a = b)(a - b)$, obţinem $E(x) = (2x + 3 + 2x - 3)(2x + 3 - 2x + 3) = 4x \cdot 6 = 24x$.
11. $\boxed{D}$: Fie $ABCD$ rombul nostru cu $AC = 16$ şi $BD = 12$. Atunci latura rombului este $AD = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ cm. Distanţa căutată este lungimea h a înălţimii din B din tringhiul ABD. Notând cu O intersecţia diagonalelor, aria acestui triunghi este $\dfrac{BD \cdot AO}{2} = \dfrac{12 \cdot 8}{2} = 48\,\text{cm}^2$. Pe de altă parte aria se mai poate scrie $\dfrac{h \cdot AD}{2} = 5h$. Rezolvând ecuaţia $5h = 48$, obţinem $h = \dfrac{48}{5} = 9,6$ cm.
12. $\boxed{C}$: Notând cele două unghiuri suplementare A şi B, avem $A + B = 180°$. Bisectoarea unghiului A îl va împarţi în două părţi egale cu $\frac{A}{2}$. La fel bisectoarea unghiului B îl va împarţi în două unghiuri masurând $\frac{B}{2}$. Unghiul format de cele două bisectoare va fi egal cu $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} = \frac{A+B}{2} = \frac{180°}{2} = 90°$.

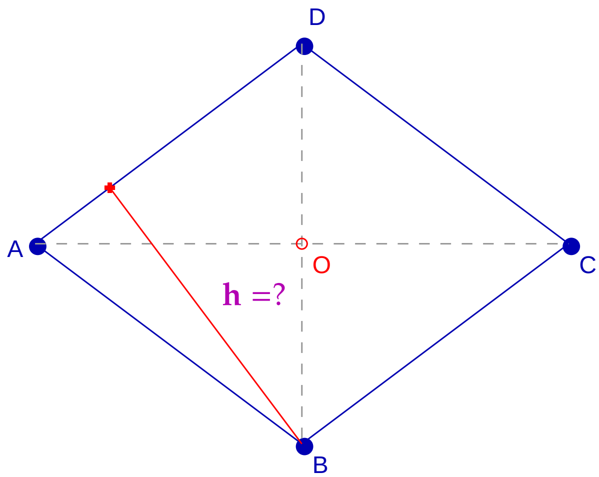


FIGURA 1. exercițiul 11.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Pătratele perfecte de două cifre în baza zece sunt

$$\boxed{16, 25, 36, 49, 64, 81}$$

b. Pentru $a, b \in \{1, 2, 3..., 9\}$ (cifre nenule) avem

$$\sqrt{\overline{ab} + \overline{ba}} = \sqrt{(10a + b) + (10b + a)} = \sqrt{11(a + b)}$$

Cum $2 \leq a + b \leq 18$, numărul $\sqrt{11(a + b)}$ natural, dacă şi numai dacă $a + b = 11$. Cifrele a, b cu această proprietate, pentru care $\overline{ab}$ este minim, sunt $a = 2, b = 9$ şi ele dau numărul $\boxed{29}$.

14. a. Funcţia f trebuie să fie de gradul întâi, deci de forma $f(x) = ax + b$. Pentru ca punctele A şi B să fie pe graficul lui f condiţiile sunt

$$\begin{cases} f(1) &= a + b &= 2 \\ f(4) &= 4a + b &= 8 \end{cases}$$

Scăzând din a doua ecuaţie pe prima, avem $3a = 6$, deci $a = 2$. Substituind în prima ecuaţie vom avea $2 + b = 2$, deci $b = 0$. Funcţia este de forma $f(x) = \boxed{2x}$.

b. Fie $C(4, 2)$. Atunci AB este ipotenuză în triunghiul ABC, deci $AB = \sqrt{3^2 + 6^2} = \boxed{3\sqrt{5}}$.

c. Coordonatele mijlocului lui AB sunt $m = \dfrac{1 + 4}{2} = \dfrac{5}{2}$ şi $n = \dfrac{2 + 8}{2} = 5$, deci punctul este $\boxed{M\left(\frac{5}{2}, 5\right)}$.

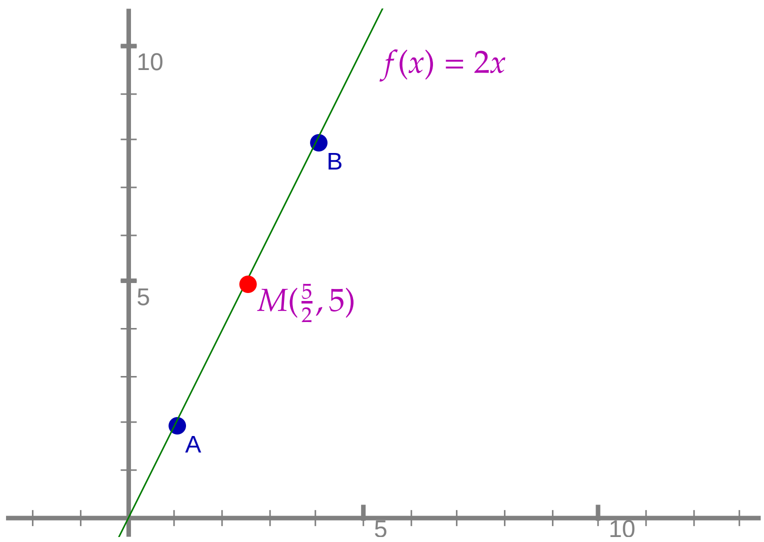


FIGURA 2. Exerciţiul 14.

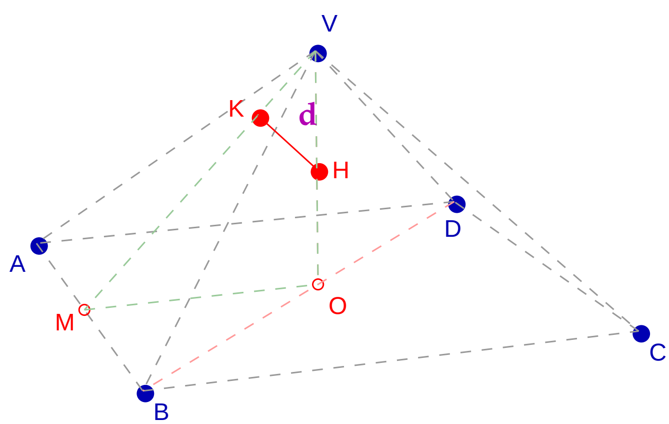


FIGURA 3. Exerciţiul 15.

15. a.

b. Fie O intersecţia diagonalelor bazei $ABCD$ şi M mijlocul segmentului AB. Atunci $OM = \frac{12}{2} = 6$. Din triunghiul dreptunghic isoscel VOM, avem $VM = 6\sqrt{2}$. Atunci aria feţei laterale VAB este $\frac{6\sqrt{2} \cdot 12}{2} = 36\sqrt{2}$, iar aria laterală $4 \cdot 36\sqrt{2} = \boxed{144\sqrt{2}}$.

c. Proiecţia muchiei laterale VB pe planul bazei este OB, iar unghiul pe care VB îl face cu baza este $\widehat{VBO}$. Avem $OB = \frac{BD}{2} = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$

şi folosind teorema lui Pitagora $VB = \sqrt{OB^2 + VO^2} = \sqrt{72+36} = 6\sqrt{3}$. Atunci

$$\cos \widehat{VBO} = \frac{OB}{VB} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

d. Fie K piciorul perpendicularei din H pe VM. Distanţa de la H la planul (VAB) este lungimea segmentului HK. Din asemănarea triunghiurilor ΔVKH şi ΔVOM avem

$$\frac{HK}{OM} = \frac{VH}{VM},$$

sau

$$\frac{HK}{6} = \frac{3}{6\sqrt{2}}$$

De aici $HK = \boxed{\frac{3\sqrt{2}}{2}}$.

CAPITOLUL 3

Varianta 18

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $84 : 7 = \boxed{12}$
2. $a \cdot b = 5 \cdot 3 = \boxed{15}$
3. 30% din 540 se calculează astfel $\frac{30}{100} \cdot 540 = 3 \cdot 54 = \boxed{162}$
4. Probabilitatea ca sa iasa una din cele 6 feţe este $\boxed{\frac{1}{6}}$.
5. Perimetrul pătratului este $4 \cdot 8 = \boxed{32}$ cm.
6. Aria triunghiului echilateral de latura l este $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ Din ecuaţia $\frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}$ obţinem $l^2 = 36 \cdot 4 = 144$, deci $l = \sqrt{144} = \boxed{12}$.
7. $V_{\text{sfera}} = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 6^3}{3} = \boxed{288}\pi$.
8. $Aria_{\text{trapez}} = \frac{(b+B)h}{2}$ unde b este lungimea bazei mici, B este lungimea bazei mari a trapezului şi h este înălţimea trapezului. Cum lungimea liniei mijlocii a unui trapez este $\frac{b+B}{2}$, avem $Aria_{\text{trapez}} = 7 \cdot 10 = \boxed{70}\,\text{cm}^2$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{D}$: Singura pereche de numere care corespunde este $(1, -5)$: $-2 \cdot 1 - 3 = -2 - 3 = -5$.
10. $\boxed{C}$: $(x+2)(2x-1) + x + 4 = 0$ este echivalentă cu $2x^2 - x + 4x - 2 + x + 4 = 0$ sau $2x^2 + 4x + 2 = 0$. După împărţirea cu 2 avem $x^2 + 2x + 1 = 0$ echivalent cu $(x+1)^2 = 0$ sau $x = -1$.
11. $\boxed{B}$: Dacă rombul are un unghi de $60°$, diagonala mică (d) îl împarte in doua triunghiuri echilaterale cu latura egală cu a diagonalei mici. Deci, latura rombului l este egala cu $d = 15$. Ducând diagonala mare D a rombului, observam formarea unui triunghi dreptunghic cu catetele $\frac{D}{2}$ şi $\frac{d}{2}$, şi cu ipotenuza l.

    Aplicând teorema lui Pitagora în acest triunghi, obţinem: $\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = l^2$.

Cunoscând $l = d = 15$cm, obţinem $\dfrac{D^2}{4} + \dfrac{15^2}{4} = 15^2$, sau $D^2 + 225 = 900$, de unde $D^2 = 775 = 225 \cdot 3$, deci $D = 15\sqrt{3}$

12. $\boxed{C}$: Raza cercului circumscris unui triunghi dreptunghic este egală cu jumătate din ipotenuza triunghiului. Aplicând teorema lui Pitagora găsim lungimea ipotenuzei triunghiului egală cu $\sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$. Deci raza cercului circumscris triunghiului dreptunghic este egală cu $\dfrac{13}{2} = 6,5$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. $(\sqrt{10} \cdot \sqrt{90} : \sqrt{50})^2 - (\sqrt{90} - \sqrt{40})^2 = \left(\sqrt{\dfrac{10 \cdot 90}{50}}\right)^2 - (\sqrt{9}\sqrt{10} - \sqrt{4}\sqrt{10})^2 = \dfrac{10 \cdot 90}{50} - (3\sqrt{10} - 2\sqrt{10})^2 = 18 - 10 = \boxed{8}$.

b. Folosind faptul că $1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1}$, $k \in \mathbb{N}^*$, avem $s = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{2006}{2007} - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{2006}{2007}\right) = \boxed{-1}$.

14. a. Explicităm modulul şi avem $|x-1| = x-1$ pentru $x \geq 1$ şi $|x-1| = -(x-1) = -x+1$ pentru $x < 1$.
- Pentru $x \geq 1$, ecuaţia devine $x - 1 = 1$ cu soluţia $x = 2 \in [1, \infty)$
- Pentru $x < 1$, ecuaţia devine $-x + 1 = 1$ cu soluţia $x = 0 \in (-\infty, 1)$

Deci soluţiile ecuaţiei date sunt $\boxed{2}$ şi $\boxed{0}$

b. Inegalitatea $|x| \leq 2$ este echivalentă cu $-2 \leq x \leq 2$. Numerele întregi din acest interval sunt $\boxed{-2, -1, 0, 1, 2}$.

c. Conform punctului (a) soluţiile ecuaţiei $|x - 1| = 1$ sunt $x = 2$ şi $x = 0$. Distingem deci cazurile:

$x = 2$: Inegalitatea $|x - y| < 2$ devine $|2 - y| < 2$. Cum y este întreg, rezultă $2 - y \in \{-1, 0, 1\}$, deci $y \in \{1, 2, 3\}$.

$x = 0$: Inegalitatea $|x - y| < 2$ devine $|-y| = |y| < 2$. Cum y este întreg, rezultă $y \in \{-1, 0, 1\}$.

Perechile cu proprietăţile cerute sunt deci

$$\boxed{(2,1), (2,2), (2,3), (0,-1), (0,0), (0,1)}$$

15. a. Vezi pagina următoare.

b. $A_t = A_{bazei} + A_l$. Baza fiind un pătrat de latură 12, aria bazei este egală cu $12^2 = 144$. Piramida fiind patrulateră regulată are toate feţele laterale egale şi $A_l = 4 \cdot A_{VAB}$. Fie M mijlocul lui AB şi O centrul piramidei. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic VOM avem: $VM = \sqrt{VO^2 + MO^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$. Astfel $A_{VAB} = \dfrac{AB \cdot VM}{2} = \dfrac{12 \cdot 10}{2} = 60$. Deci $A_t = 144 + 4 \cdot 60 = 144 + 240 = \boxed{384}$.

c. Baza piramidei fiind un pătrat de latură 12, lungimea diagonalei BD este $12\sqrt{2}$. Conform teoremei lui Pitagora în triunghiul VOB, avem $VB = \sqrt{VO^2 + OB^2} = \sqrt{8^2 + (6\sqrt{2})^2} = \sqrt{136}$.
Evaluăm acum aria triunghiului ΔBVD în două moduri:
Pe de o parte $A_{BVD} = \dfrac{VO \cdot BD}{2} = \dfrac{8 \cdot 12\sqrt{2}}{2} = 48\sqrt{2}$, iar altfel $A_{BVD} = \dfrac{VB \cdot VD \cdot \sin\widehat{BVD}}{2} = \dfrac{\sqrt{136} \cdot \sqrt{136} \cdot sin\widehat{BVD}}{2} = 68\sin BVD$. De aici $48\sqrt{2} = 68\sin\widehat{BVD}$ şi astfel găsim

$$\sin\widehat{BVD} = \frac{48\sqrt{2}}{68} = \boxed{\frac{12\sqrt{2}}{17}}$$

d. Fie P piciorul perpendicularei din H pe VM. Cum $HP \perp VM$, $PM \perp AB$ şi $OM \perp AB$, conform reciprocei a doua a teoremei celor trei perpendiculare avem $HP \perp (VAB)$. Deci distanţa de la H la planul VAB este HP. Cum $PH = HO$ şi MH latură comună, triunghiurile dreptunghice HPM şi HOM sunt congruente (cazul catetă-ipotenuză). Deci $MP = MO = 6$. In triunghiurile VPH şi VOM avem unghiul OVM comun şi $VPH = VOM = 90°$. Conform cazului de asemănare unghi-unghi rezultă că triunghiurile VPH şi VOM sunt asemenea. Avem atunci $\dfrac{VH}{VM} = \dfrac{PH}{OM}$, sau $\dfrac{8 - HO}{10} = \dfrac{HO}{6}$. De aici $48 - 6HO = 10HO$, sau $16HO = 48$ şi astfel $HO = \boxed{3}$.

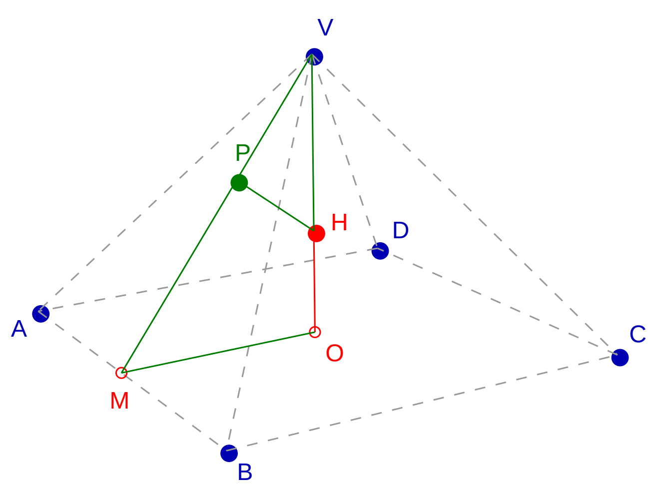


FIGURA 1. Exerciţiul 15.

CAPITOLUL 4

Varianta 19

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $25 - \frac{25}{5} = 25 - 5 = \boxed{20}$
2. $0,2 > 0,12$ adică $\boxed{x > y}$
3. Elementul comun ale mulţimilor A şi B este 4, deci $\boxed{A \cap B = \{4\}}$
4. 75% din 2000 este $\frac{75}{100} \cdot 2000 = \boxed{1500}$
5. Raza este jumătate din diametrul, deci $R = \frac{4}{2} = \boxed{2}$ m.
6. Fie $m_1,\ m_2,\ m_3$ lungimile liniilor mijlocii ale unui triunghi corespunzătoare lungimilor laturilor $a,\ b,\ c$. Cum linia mijlocie in triunghi este jumătate din lungimea laturii corespunzătoare avem: $m_1+m_2+m_3 = \frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2} = \frac{a+b+c}{2} = \frac{\text{Perimetru}}{2} = \frac{12}{2} = \boxed{6}$.
7. $A_{lat} = \pi \cdot r \cdot g$, unde r este raza bazei şi g este generatoarea. Deci $A_{lat} = \pi \cdot 3 \cdot 5 = \boxed{15\pi}$
8. $V_{prisma} = A_{baza} \cdot h$, unde h este înălţimea prismei care este egală la o prismă regulată cu muchia laterală. Deci, $h = \frac{V_{prisma}}{A_{baza}} = \frac{200}{20} = \boxed{10\ cm}$

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{D}$: Avem $4x^2 + 8x + 4 = 0$ echivalent cu $4(x^2 + 2x + 1) = 0$ sau $4(x + 1)^2 = 0$. De unde $x + 1 = 0$, deci $x = -1$.
10. $\boxed{A}$: Dublând numărul de muncitori, lucrarea se finalizează în jumătate de timp, deci $10 : 2 = 5$ ore.
11. $\boxed{C}$: Fie AD înălţimea din vârful A. Aplicând teorema catetei pentru cateta AB avem: $AB = \sqrt{BC \cdot BD}$ (cateta este medie proporţională între ipotenuză şi proiecţia ei pe ipotenuză). Deci $AB^2 = BC \cdot BD$, de unde $BD = \frac{AB^2}{BC} =$

$\frac{256}{20} = \frac{64}{5}$. Proiecţia catetei AC pe ipotenuză este CD, iar $CD = BC - BD = 20 - \frac{64}{5} = \frac{100-64}{5} = \frac{36}{5} = 7,2$.

12. $\boxed{B}$: Ştim că $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, şi că $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Inlocuind în formula dată, obţinem:$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Folosind formula $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$, expresia de mai sus devine $\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}-\frac{3}{4} = -\frac{1}{2} = -0,5$

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Avem 2 ecuaţii cu două necunoscute. Prima ecuaţie este $a+b = 156$, iar a doua $\frac{a+24}{b-32} = 1$. Din ecuaţia a doua, obţinem $a+24 = b-32$, sau $b = a+24+32 = a+56$. Înlocuind pe b în prima ecuaţie, obţinem $a+a+56 = 156$, deci $2a = 156-56 = 100$. De aici îl scoatem pe $\boxed{a = 50}$ şi înlocuind în prima ecuaţie găsim $\boxed{b = 106}$.

b. Media aritmetică ponderată a numerelor a şi b este

$$\frac{3\cdot 50+2\cdot 106}{3+2} = \frac{150+212}{5} = \boxed{\frac{362}{5} = 72,4}$$

14. a.

b. Punctul $P(12,2)$ nu poate aparţine graficului funcţiei f pentru că $x = 12$ nu este în domeniul de definiţie al funcţiei f. Verificăm dacă $M(4,-1)$ aparţine graficului funcţiei f. Pentru aceasta trebuie ca $f(4) = -1$. Avem $f(4) = \frac{1}{4}\cdot 4-1 = 1-1 = 0$, de unde rezultă că $M(4,-1)$ nu aparţine graficului lui f. Similar, pentru ca $N(8,1)$ să aparţină graficului lui f trebuie ca $f(8) = 1$. Avem $f(8) = \frac{1}{4}\cdot 8-1 = 2-1 = 1$, deci punctul $\boxed{N(8,1)}$ aparţine graficului funcţiei f.

c. $f(x) > 2x-8$ este echivalentă cu $\frac{1}{4}x-1 > 2x-8$ sau $x-4 > 8x-32$. Avem $8x-x < 32-4$ echivalent cu $7x < 28$ sau $x < 4$. Soluţia inecuaţiei este $x \in (-\infty,4)\cap\{0,4,8\} = \boxed{\{0\}}$.

15. a.

b. $A_l = 4\cdot A_{VAB}$. Triunghiul VAB este triunghi echilateral de latură 6 şi deci înălţimea lui este $\frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$. Prin urmare $A_l = 4\frac{6\cdot 3\sqrt{3}}{2} = \boxed{36\sqrt{3}}$

c. BD diagonala pătratului de latură 6 este egală cu $6\sqrt{2}$. In triunghiul BVD avem $BD^2 = VB^2 + VD^2$. Intr-adevăr $(6\sqrt{2})^2 = 6^2 + 6^2$ sau $72 = 36 + 36$. Conform reciprocei teoremei lui Pitagora rezultă că triunghiul BVD este dreptunghic în V, deci $VB \perp VD$.

d. Fie M şi N mijloacele segmentelor AB şi respectiv DC, iar O centrul bazei piramidei. Unghiul planelor VAB şi VAD este unghiul MVN. Vom afla $\sin(\widehat{MVN})$ prin calcularea ariei triunghiului VMN în două moduri.

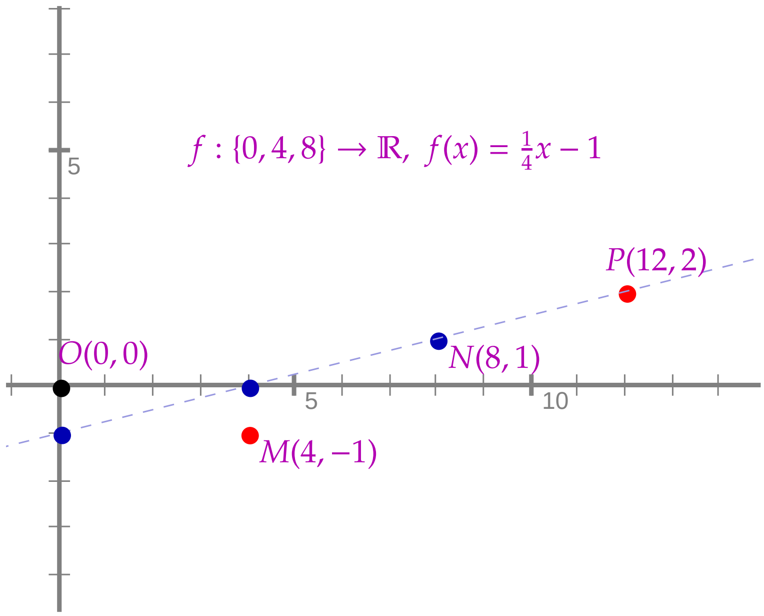


Figura 1. Exerciţiul 14. Graficul funcţiei este reprezentat prin cele trei puncte albastre.

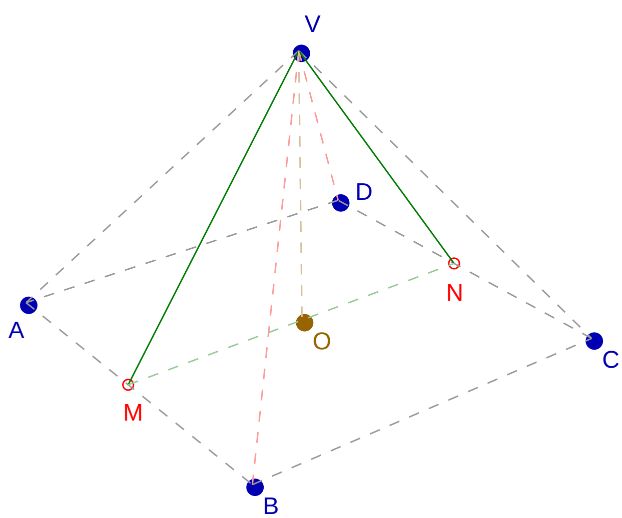


Figura 2. Exerciţiul 15.

Avem pe de o parte $A_{VMN} = \dfrac{VO \cdot MN}{2}$, iar pe de alta $A_{VMN} = \dfrac{VM \cdot VN \cdot \sin(\widehat{MVN})}{2}$.
Egalând cele două arii avem:

$$\frac{VO \cdot MN}{2} = \frac{VM \cdot VN \cdot \sin(M\hat{V}N)}{2} \quad (1)$$

Avem $VM = VN = 3\sqrt{3}$ (înălţimi in triunghiuri echilaterale congruente), iar VO se poate afla din triunghiul dreptunghic VOA prin aplicarea teoremei lui Pitagora: $VO = \sqrt{VA^2 - AO^2} = \sqrt{6^2 - \left(\frac{6\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{36 - 18} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Inlocuind în relaţia (1) avem:

$$\frac{3\sqrt{2} \cdot 6}{2} = \frac{3\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \sin(M\hat{V}N)}{2}$$

sau $9\sqrt{2} = \dfrac{27 \cdot \sin(M\hat{V}N)}{2}$, de unde

$$\sin(\widehat{MVN}) = \frac{9\sqrt{2} \cdot 2}{27} = \boxed{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

CAPITOLUL 5

Varianta 20

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $2^2 + 3 - 2 = 4 + 3 - 2 = \boxed{5}$.
2. Un caiet costă $\frac{5,40}{3} = \boxed{1,80}$ lei.
3. $3\sqrt{2} + \sqrt{18} = 3\sqrt{2} + \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = \boxed{6\sqrt{2}}$.
4. $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ are $\boxed{6}$ elemente.
5. $1\,\mathrm{dag} = 10\,\mathrm{g}$, deci $50\,\mathrm{dag} = \boxed{500}\,\mathrm{g}$.
6. $\mathrm{tg}\,30^\circ = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$.
7. Fie l latura cubului. Cubul are 12 muchii, deci $12 \cdot l = 36$ cm, de unde $l = \frac{36}{12} = \boxed{3}$ cm.
8. Volumul cilindrului este $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$, deci
$$V = 3^2 \cdot 4 \cdot \pi = \boxed{36}\pi\,\mathrm{cm}^3$$

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{C}$: Avem $f(1) = 2 - 3 = -1$, deci $C(1, -1)$ aparţine graficului funcţiei f.
10. $\boxed{A}$: $E(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^4 - 1 + [(\sqrt{3})^2 + 1]^2 = 9 - 1 + 4^2 = 8 + 16 = 24$.
11. $\boxed{A}$: Să notăm cele trei unghiuri cu $7x,\ 6x$ şi, respectiv, $5x$. Neavând nici un punct comun, suma celor trei unghiuri este 360°. Deci, $7x + 6x + 5x = 360^\circ$, de unde $18x = 360^\circ$, deci $x = 20^\circ$. Cel mai mic unghi este $5x$, adică 100°.
12. $\boxed{D}$: Mediana relativă la ipotenuză este jumătate din ipotenuză, de unde deducem ca ipotenuza are lungimea 10 cm. Aria este $\frac{\text{ipotenuza} \cdot \text{înălţimea}}{2} = \frac{10 \cdot 4}{2} = 20$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Numărul de persoane cu vârsta cuprinsă între 18 şi 40 de ani este 17% din totalul de 200 persoane, adică

$$\frac{17}{100} \cdot 200 = \boxed{34}$$

b. Probabilitatea ca locatarul care pleacă să aibă peste 60 de ani este egală cu numărul de persoane peste 60 de ani împărţit la numărul total de persoane. Aceasta fracţie este egală cu procentajul de persoane peste 60 de ani. Procentajul îl calculăm facând diferenţa:

$$100\% - (13\% + 17\% + 57\%) = 100\% - 87\% = \boxed{13\%}$$

14. a. *Metoda I:* Ecuaţia $x^2 - 4x + 3 = 0$ are discriminantul $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$, de unde $x_1 = \frac{4+2}{2} = \boxed{3}$ şi $x_2 = \frac{4-2}{2} = \boxed{1}$
Metoda II: Ecuaţia se poate scrie $x^2-x-3x+3 = 0$, sau $x(x-1)-3(x-1) = 0$, de unde $(x-1)(x-3) = 0$. Cele două soluţii sunt $x_1 = \boxed{1}$ şi $x_2 = \boxed{3}$.

b. Avem $\frac{n^2+4n+3}{n+3} = \frac{n^2+3n+n+3}{n+3} = \frac{n(n+3)+(n+3)}{n+3} = \frac{(n+3)(n+1)}{n+3} = n+1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$.

c. De la punctele precedente avem $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ şi $x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3)$, deci $\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^2 \cdot \frac{x^2-4x+3}{x^2+4x+3} : \frac{x^2+4x+4}{x^2-9} = \frac{(x+2)^2}{(x-3)^2} \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{(x+1)(x+3)} \cdot \frac{(x-3)(x+3)}{(x+2)^2} = \frac{x-1}{x+1}$.

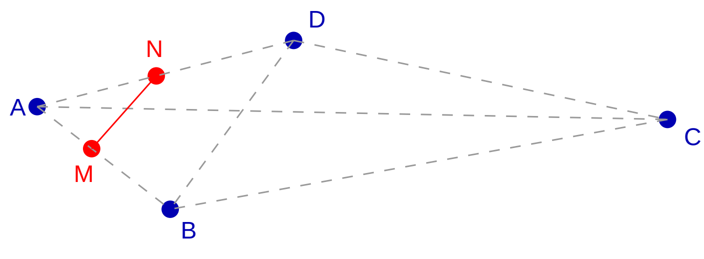


FIGURA 1. Exerciţiul 15. Piramida considerată este foarte "plată".

15. a.

b. Fie P mijlocul segmentului BC. Atunci AP este înălţime în triunghiul ABC. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic APB avem $AP =$

$\sqrt{AB^2 - BP^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$. Deci $A_{ABC} = \dfrac{AP \cdot BC}{2} = \dfrac{4\sqrt{3} \cdot 8}{2} = 16\sqrt{3}$.

Triunghiul DBC fiind isoscel ($DB = DC = 5$), DP este perpendiculară pe BC. Conform teoremei lui Pitagora în triunghiul dreptunghic ΔDBP, avem $DP = \sqrt{DB^2 - BP^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$. Atunci aria triunghiului DBC este $\dfrac{DP \cdot BC}{2} = \dfrac{3 \cdot 8}{2} = 12$.

Aria totală a piramidei este atunci

$$\text{Aria}_{\text{totală}} = \text{Aria}_{ABC} + 3 \cdot \text{Aria}_{DBC} = \boxed{16\sqrt{3} + 36}\,\text{cm}^2$$

c. Cum $MN \| BD$ unghiul dintre dreptele MN şi CD este egal cu unghiul dintre dreptele BD şi CD. Determinăm sinusul acestui unghi calculând aria triunghiului BCD în două moduri.
Am văzut la subpunctul (b) că aria triunghiului BCD este 12.
Pe de altă parte aceaşi arie poate fi calculată prin

$$\frac{DB \cdot DC \cdot \sin \widehat{BDC}}{2} = \frac{25 \sin \widehat{BDC}}{2}$$

Avem astfel $12 = \dfrac{25 \sin \widehat{BDC}}{2}$, de unde

$$\sin \widehat{BDC} = \boxed{\frac{24}{25}}$$

d. Dreapta MN este paralelă cu dreapta DB care este inclusă în planul (DBC), deci MN este paralelă cu planul (DBC). Atunci proiecţia segmentului MN pe acest plan va avea aceaşi lungime cu MN. Dar MN este linie mijlocie în triunghiul ΔABD, deci este egală cu $\dfrac{BD}{2} = \boxed{\dfrac{5}{2} = 2,5}$ cm.