BAC 2007

Pro–Didactica

Testare Naţională

Rezolvările variantelor 11–15

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

Cuprins

CAPITOLUL 1

Varianta 11

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $\boxed{49}$
2. $4x : 2 = \boxed{2x}$
3. Având acelaşi numărator, mai mic este cel cu numitorul mai mare adică $\boxed{\frac{7}{6}}$.
4. $\frac{78+34}{2} = \frac{112}{2} = \boxed{56}$
5. $4 \cdot 15 = \boxed{60}$
6. $\frac{60^\circ}{2} = \boxed{30^\circ}$
7. $45\sqrt{3} - 36\sqrt{3} = \boxed{9\sqrt{3}}$
8. Cu teoorema lui Pitagora, lungimea generatoarei este $\sqrt{3^2+4^2} = \boxed{5}$

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{D}$. Inţelegem că propunătorul a vrut ca A să conţină toate numerele naturale impare între 1 şi 100. Cum sunt tot atâtea numere impare cât sunt şi pare între 1 şi 100, avem $\frac{100}{2} = 50$ numere impare.
10. $\boxed{C}$. După scumpire va costa $(1 + 10\%) \cdot 40 = 1.1 \cdot 40 = 44$.
11. $\boxed{B}$. Aria paralelogramului este dublul ariei triunghiului dreptunghic ABD. Iar aceasta este jumătate din produsul catetelor, adică $\frac{5 \cdot 12}{2} = 30$. Deci aria paralelogramului este 60.
12. $\boxed{B}$. Raza cercului este $\frac{6\pi}{2\pi} = 3$ şi atunci aria este $3^2\pi = 9\pi$

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. $n-3$ este multiplu de $9, 18, 27$, deci multiplu de 54 (cel mai mic multiplu comun al numerelor $9, 18, 27$). Cel mai mic asemenea multiplu natural (care dă cât nenul) este $n - 3 = 54$, deci $\boxed{n = 57}$.

b. Am văzut la punctul a) că $n-3$ este multiplu de 54, deci de forma $n-3 = 54k$, cu k număr natural. Avem de rezolvat inegalităţile $100 < 3 + 54k < 250$, care se pot scrie $97 < 54k < 247$. De aici $\frac{97}{54} < k < \frac{247}{54}$. Singurele valori naturale ale lui k ce satisfac aceste condiţii sunt $k \in \{2, 3, 4\}$. Le substituim în $n = 3 + 54k$ şi obţinem $\boxed{n \in \{111, 165, 219\}}$.

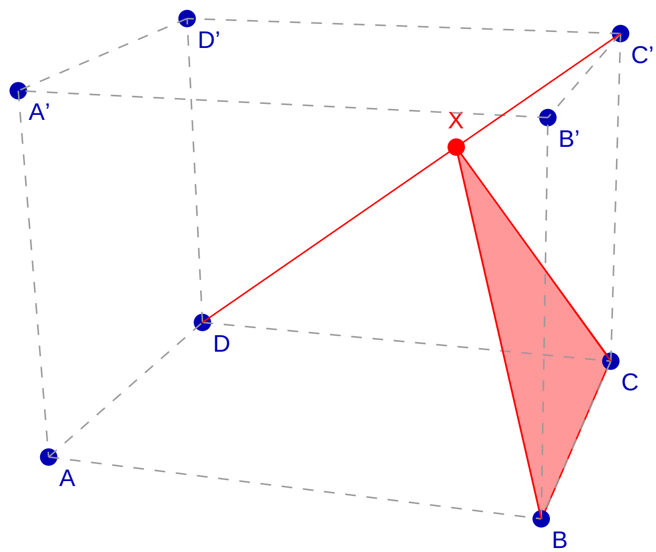
14. a. Explicitând condiţia din enunţ obţinem sistemul în a şi b:

$$\begin{aligned} (-1)a + b &= -5 \\ 2a + b &= 1 \end{aligned}$$

Scăzând prima ecuaţie din a doua, avem $3a = 6$, deci $a = 2$. Substituim în oricare din ecuaţii şi găsim $b = -3$. Deci $\boxed{a = 2, b = -3}$.

b. Segmentul cu capetele $(-1, -5)$ şi $(4, 5)$.

c. Fie (t, t) un asemenea punct. Atunci $2t - 3 = t$. Rezolvând ecuaţia avem $t = 3$, deci punctul căutat este $\boxed{(3, 3)}$.



15. a.

b. Volumul este $20 \cdot 16 \cdot 15 = \boxed{4800}$.

c. Fie X piciorul perpendicularei din C pe DC'. Dreapta BC este perpendiculară pe planul $CDD'C'$, iar CX perpendiculară pe DC'. Conform teoremei celor trei perpendiculare, BX este perpendiculară pe DC'. In triunghiul dreptunghic DCC', lungimea înăţimii CX este dată

$$CX = \frac{CD \cdot CC'}{DC'} = \frac{20 \cdot 15}{\sqrt{20^2 + 15^2}} = 12$$

Cum BC este perpendiculara pe planul $CDD'C'$, este în particular perpendiculară şi pe CX, deci triunghiul BCX este dreptunghic cu unghiul drept în C. Folosind teorema lui Pitagora avem

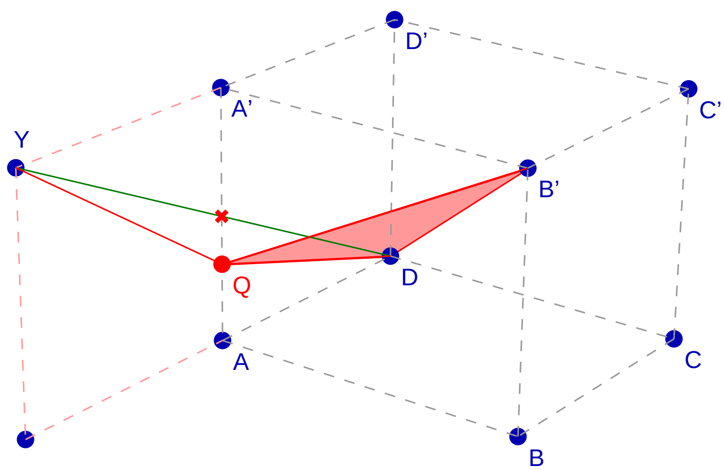
$$BX = \sqrt{BC^2 + CX^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = \boxed{20}$$

d. Rotim cu $90°$ faţa $ABB'A'$ înspre exterior în jurul axei AA' (vezi figura). Notăm cu Y punctul obţinut prin rotaţia vârfului B'. Deoarece triunghiul $B'QD$ are o latură fixă, perimetrul său este minim atunci când suma lungimilor segmentelor $B'Q$ şi QD este minimă. Din construcţie, avem $B'Q = QY$ (triunghiurile $B'QA$ şi YQA sunt congruente). Rezultă

$$B'Q + QD = YQ + QD \geq YD,$$

iar **egalitatea are loc atunci când** Q **este punctul de intersecţie al dreptelor** YD **şi** AA'. Deoarece $A'Y = 20\,cm$ şi $A'D' = 16\,cm$, folosind asemănarea triunghiurilor rezultă $\frac{A'Q}{QA} = \frac{20}{16}$, adică $A'Q = \frac{5}{4}QA$. Cum $A'Q + QA = 15\,cm$ rezultă imediat

$$\boxed{AQ = \frac{20}{3}\,cm}$$



CAPITOLUL 2

Varianta 12

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $\boxed{77}$
2. $25\% \cdot 16 = \frac{25}{100} \cdot 16 = \boxed{4}$
3. Se ştie că un număr este divizibil cu 3 dacă şi numai dacă suma cifrelor lui este divizibilă cu 3. Cum suma cifrelor lui a este $1+2+3+9=15$, iar suma cifrelor lui b este $1+2+3+4=10$, rezultă că doar $\boxed{a = 1239}$ este divizibil cu 3.
4. $f(6) = -6+4 = \boxed{-2}$
5. Aria triunghiului echilateral de latura l este $\dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$. In cazul de faţă obţinem $\boxed{9\sqrt{3}}$
6. $4 \cdot 4 = \boxed{16}$
7. Cum aria laterală are formula $A_l = 2\pi Rh$, obţinem $100\pi = 2\pi \cdot 5 \cdot h$. Rezolvând ecuaţia găsim $h = \boxed{10}$.
8. $\sqrt{2^2 + (\sqrt{7})^2 + (\sqrt{5})^2} = \boxed{4}$

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{D}$, căci $a^2 = (-a)^2$ pentru orice a real, în particular şi pentru $a = \sqrt{2}-1$.
10. $\boxed{C}$, căci $3 \cdot 6 = 18$
11. $\boxed{C}$. Intr-adevăr fie a lungimea lui AB. Atunci $PM = \frac{a}{4}$ şi $PB = \frac{3a}{4}$. Iar $AM = \frac{a}{2}$, deci $\dfrac{PB}{AM} = \dfrac{\frac{3a}{4}}{\frac{a}{2}} = \dfrac{3}{2} = 1.5$
12. $\boxed{B}$. Unghiul $\widehat{MBC}$ este de $45°$ şi atunci triunghiul dreptunghic MBC este isoscel. In consecintă $MC = CB = 6$, deci $DM = DC - MC = 8 - 6 = 2$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Fie r suma de bani pe care o are Radu şi a suma Alexandrei. Fiecare dintre Radu şi Alexandra va pune $r+1$ lei pentru carte, deci cartea costă $2(r+1)$ lei şi avem sistemul

$$\begin{aligned} a+r &= 10 \\ (a-1)-(r+1) &= 5 \end{aligned}$$

Rezolvându-l găsim $a = 8.50$ lei şi $r = 1.50$ lei. Cartea costă deci $2 \cdot (1.5 + 1) = \boxed{5}$ lei.

Notă Problema poate fi rezolvată şi aşa: Din toţi banii pe care i-au avut Radu şi Alexandra, au mai rămas 5 lei. Cum restul a fost cheltuit pentru carte, aceasta costă $10-5 = 5$ lei. Partea Alexandrei din carte a fost 2.50 lei şi i-a mai dat şi un leu lui Radu. Deci ea a avut $5+2.50+1 = 8.50$ lei.

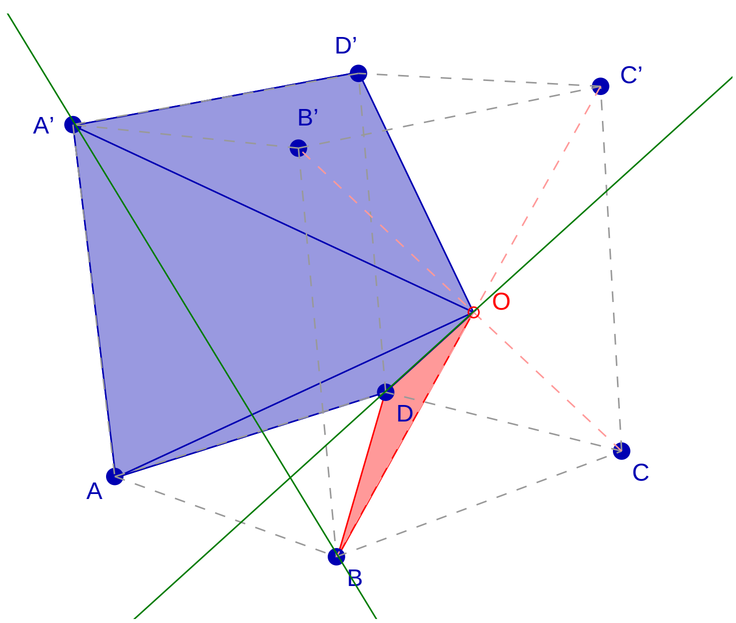
b. Am aflat deja la punctul a) că Alexandra a avut $\boxed{8.50}$ lei.

14. a. $(x-3)(x-7) = x^2 - 3x - 7x + 3\cdot 7 = x^2 - 10x + 21$

b. Aducând la acelaşi numitor între paranteze, avem

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{2x^2-7x-17-(x+1)(x-3)}{(x-3)(x-7)} \cdot (x^2-9) \\ &= \frac{x^2-5x-14}{(x-3)(x-7)} \cdot (x-3)(x+3) \\ &= \frac{(x+2)(x-7)}{x-7} \cdot (x+3) = (x+2)(x+3) \end{aligned}$$

c. Produsul a două consecutive este par, căci unul din numere este par.



15. a.

b. Pentru simplitate notăm cu a lungimea laturii cubului. Triunghiul BDC' este echilateral, toate laturile fiind diagonale in feţe ale cubului. Avem

$BD = a\sqrt{2}$ şi aria triunghiului BDC' este $\frac{BD^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Aria triunghiului BDO este jumatate din cea a lui BDC', deci avem

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$$

Rezolvând ecuaţia (ţinând cont că $a > 0$) găsim $a = 2$.

c. Inălţimea piramidei este egală cu latura cubului, iar aria bazei este aria unei feţe a cubului. Volumul piramidei este atunci

$$\frac{a^2 \cdot a}{3} = \boxed{\frac{8}{3}}$$

d. Fie O' centrul feţei $A'B'C'D'$. Dreapta OO' este paralelă cu $A'B$, deci avem de găsit cosinusul unghiului dintre dreptele DO şi OO', unghi pe care-l notăm cu θ. Să observăm că $DO = DO'$, deci triunghiul DOD' este isoscel. Cum DO este înălţime în triunghiul echilateral BDC', avem $DO = \frac{BD\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$. Pe de altă parte fie M proiecţia lui O pe $B'C'$. Triunghiul OMO' este dreptunghic isoscel, cu catetele jumătate din latura cubului. Atunci $OO' = \sqrt{2}$. Fie H mijlocul segmentului OO'. Triunghiul OHD este dreptunghic şi avem

$$\cos\theta = \frac{OH}{OD} = \frac{\frac{OO'}{2}}{OD} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{6}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{6}}$$

CAPITOLUL 3

Varianta 13

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $36 - 7 = \boxed{29}$
2. $\dfrac{3 \cdot 7}{3 \cdot 8} = \boxed{\dfrac{21}{24}}$
3. Deoarece $43 = 4 \cdot 10 + 3$, restul este $\boxed{3}$
4. Avem 4 cifre impare într-o mulţime de 6 cifre, deci probabilitatea este $\dfrac{4}{6} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$.
5. Suma unghirilor unui triunghi este 180° deci al treilea unghi are mărimea $180^\circ - (37^\circ + 69^\circ) = \boxed{74^\circ}$
6. Linia mijlocie este jumătate din suma bazelor, deci suma bazelor este dublul liniei mijlocii, adică $\boxed{28}$.
7. $V = \pi R^2 G = \pi \cdot 3^2 \cdot 7 = 63\pi$, deci răspuns $\boxed{63}$.
8. Aria totală este suma ariilor celor 6 feţe, adică $2(3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5) = \boxed{94}$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{B.}$, căci $7 \cdot \dfrac{2}{7} + 3 = 2 + 3 = 5$
10. $\boxed{D.}$, căci $ab = \left|(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2\right| = |-1| = 1$
11. $\boxed{D.}$, căci diagonala este diametru
12. $\boxed{C.}$, căci aria este $\dfrac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} = \dfrac{6 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}}{2} = 15$

3. Subiectul III.

Rezolvare.

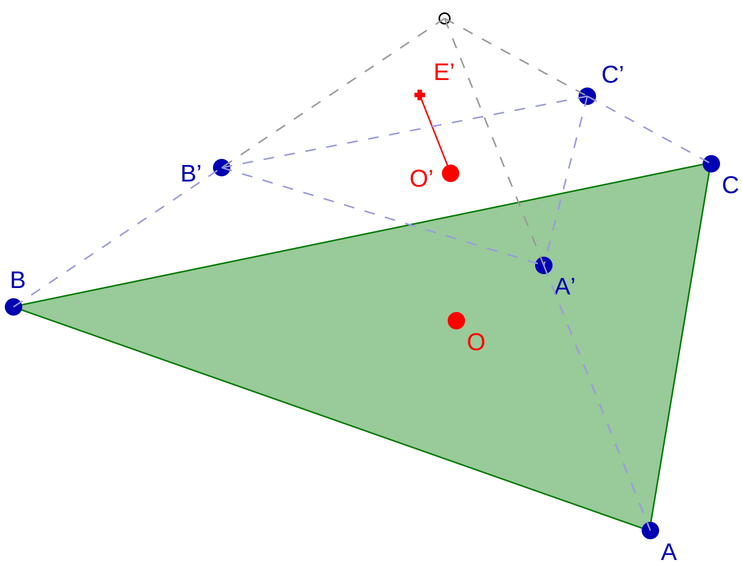
13. a. Media$=\dfrac{10\cdot 2+9\cdot 3+8\cdot 6+7\cdot 7+6\cdot 5+5\cdot 1+4\cdot 1}{2+3+6+7+5+1+1}=\dfrac{183}{25}=\boxed{7,32}$

b. Mai trebuiesc 8 sutimi ca sa avem medie de $7,4$, ceea ce corespund la $25\cdot 0,08=2$ puncte suplimentare. Nota necesară este $4+2=\boxed{6}$.

14. a. $f(1)+f(4)=(a+b)+(4a+b)=5a+2b=(2a+b)+(3a+b)=f(2)+f(3)$

b.

c. Obţinem ecuaţia $2(2m+1)-4=m^2+1$, care se mai scrie $0=m^2-4m+3=m^2-m-3m+3=(m-1)(m-3)$, deci are rădăcinile $\boxed{m_1=1, m_2=3}$.



15. a.

b. Aria bazei mari (triunghi echilateral de latură 8) este

$$\frac{8^2\sqrt{3}}{4}=16\sqrt{3}$$

Aria bazei mici (triunghi echilateral de latura 6 este

$$\frac{6^2\sqrt{3}}{4}=9\sqrt{3}$$

Apotema unui triunghi echilateral de latură l este $\dfrac{l\sqrt{3}}{6}$, deci apotema bazei mari este $\dfrac{8\sqrt{3}}{6}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ iar cea a bazei mici este $\dfrac{6\sqrt{3}}{6}=\sqrt{3}$.

Fiecare din feţele laterale este un trapez cu baza mare 8, baza mică 6 şi înălţimea dată de $\sqrt{4^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}\right)^2} = \frac{7}{\sqrt{3}}$. Deci aria unei feţe laterale este $\frac{8+6}{2}\frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{49}{\sqrt{3}}$, iar aria laterală $3 \cdot \frac{49}{\sqrt{3}} = 49\sqrt{3}$.
Astfel aria totală va fi

$$16\sqrt{3} + 9\sqrt{3} + 49\sqrt{3} = \boxed{74\sqrt{3}}$$

c. Fie V vârful piramidei din care provine trunchiul. Scriind asemănarea tringhiurilor determinate de apoteme avem $\frac{VO'}{VO} = \frac{6}{8}$. Făcând o proportţie derivată $\frac{VO - VO'}{VO} = \frac{8-6}{8}$. Deci $VO = 4 \cdot OO' = 16$. Volumul piramidei este atunci

$$V = \frac{16\sqrt{3} \cdot 16}{3} = \boxed{\frac{256\sqrt{3}}{3}}$$

d. Fie D' piciorul perpendicularei din O' pe $B'C'$, iar E' piciorul perpendicularei din O' pe planul (BCC'), care este planul de suport al feţei $BCC'B'$. Atunci $O'E'$ este înălţimea tringhiului dreptunghic $VO'D'$ (unghiul drept este $\widehat{VO'D'}$). Avem $VO' = VO - OO' = 16 - 4 = 12$, iar $VD' = \sqrt{3}$ (este apotema). Conform teoremei lui Pitagora $VD' = \sqrt{12^2 + (\sqrt{3})^2} = 7\sqrt{3}$ si atunci folosind faptul că înălţimea este raportul dintre produsul catetelor şi ipotenuză

$$O'E' = \frac{12\sqrt{3}}{7\sqrt{3}} = \boxed{\frac{12}{7}}$$

CAPITOLUL 4

Varianta 14

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $146 - 90 = \boxed{56}$

2. $\boxed{20004}$

3. Câtul este $\boxed{6}$, căci $54 = 6 \cdot 8 + 6$

4. $f(-1) = 2 \cdot (-1) = \boxed{-2}$

5. Diagonala formează un triunghi dreptunghic cu lungimea şi lăţimea. Aplicăm teorema lui Pitagora şi găsim $\sqrt{8^2 + 6^2} = \boxed{10}$

6. Vom folosi formula ariei rombului $\frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, unde d_1, d_2 sunt diagonalle rombului. Pătratul este romb cu $d_1 = d_2 = 4$, deci avem aria $\frac{4 \cdot 4}{2} = \boxed{8}$

7. Aria laterală este dată de
   perimetrul bazei $\times$ înălţimea $= 18 \cdot 10 = \boxed{180}$

8. Folosim formula ariei sferei $4\pi R^2 = 4\pi \cdot 2^2 = 16\pi$, răspuns $\boxed{16}$

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{B.}$: Media este dată de $\frac{(\sqrt{2}+1) + (\sqrt{2}-1)}{2} = \sqrt{2}$
10. $\boxed{C.}$: Substituim $x = -7$ în ecuaţie şi avem $2(-7) - m = 0$. rezolvând ecuaţia în m găsim $m = 2(-7) = -14$.
11. $\boxed{D.}$: Cele două unghiuri adunate fac $90°$, deci unghiul căutat este $\frac{90°}{2} = 45°$
12. $\boxed{A.}$: Latura este $6\frac{2}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$ şi perimetrul este $6 \cdot 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Fie p preţul iniţial. Din $p(1+20\%)(1+10\%) = 264$ avem $p = \dfrac{264}{1,2 \cdot 1,1} = \boxed{200}$

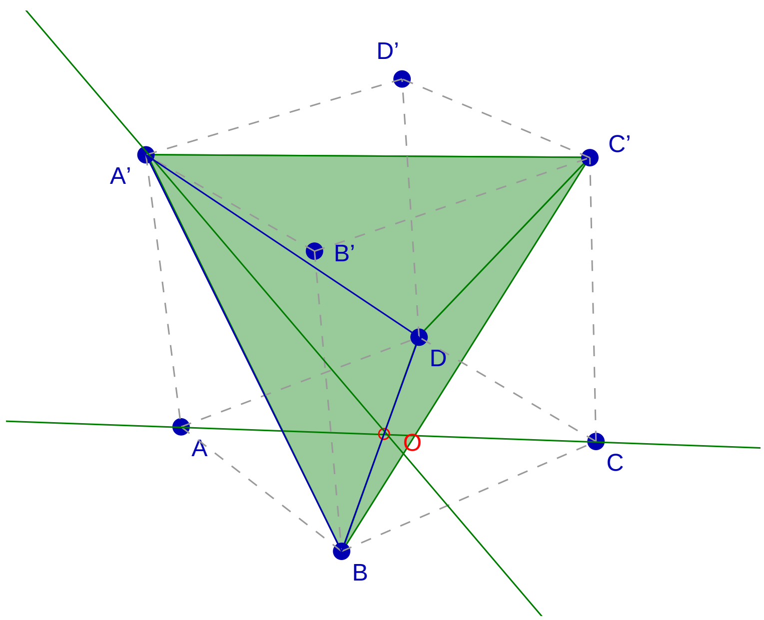
b. Procentajul este $\dfrac{264}{200} - 1 = \boxed{32\%}$.

14. a.

$$\begin{aligned} E(x) &= \left[\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2 + 2\frac{x-2}{x+2} + 1\right] \cdot \frac{x+2}{2x} \\ &= \left(\frac{x-2}{x+2} + 1\right)^2 \cdot \frac{x+2}{2x} \\ &= \left(\frac{2x}{x+2}\right)^2 \frac{x+2}{2x} = \frac{2x}{x+2} \end{aligned}$$

b. Nu există asemenea numere. Avem $\dfrac{1}{n}E(n) = \dfrac{2}{n+2}$. Pentru $n \neq 0$ natural, avem $n+2 > 2$ şi fracţia fiind subunitară nu poate fi număr întreg.

c. Pentru ca $E(x) = 2 - \dfrac{4}{x+2}$ să fie întreg este necesar şi suficient ca $x+2$ să fie divizor al lui 4. Deci $x+2 \in \{-4,-2,-1,1,2,4\}$ şi de aici $\boxed{x \in \{-6,-4,-3,-1,2\}}$. Am exclus $x = 0$ căci $E(0)$ nu este definit.



15. a.

b. Să observăm că $A'B = A'D = BD = 6\sqrt{2}$ căci toate sunt diagonale în feţe laterale. Triunghiul fiind echilateral, aria este $\dfrac{(6\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = \boxed{18\sqrt{3}}$.

c. Ambele drepte sunt în planul dreptunghiului $ACC'A'$. Triunghiurile dreptunghice OAA' şi $AA'C'$ sunt asemenea căci $\dfrac{AO}{AA'} = \dfrac{AA'}{A'C'}$ (verificare simplă). Fie E intersecţia dreptelor AC' şi $A'O$. Cum unghiul $\widehat{AA'O} = \widehat{AC'A'}$ este complementar unghiului $\widehat{C'AA'}$, triunghiul $AA'E$ este dreptunghic, ceea ce încheie demonstraţia.

d. Inălţimea piramidei este $C'E$. Am arătat la punctul precedent că $C'E$ este perpendiculară pe $A'O$ şi în plus este perpendiculară pe BD (de fapt BD este perpendiculară pe planul diagonal $ACC'A'$ care conţine pe $C'E$). Pe $C'E$ îl calculăm din triunghiul $AA'C'$. Cu teorema catetei, $C'E = \dfrac{A'C'^2}{AC'} = \dfrac{72}{6\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$. Atunci volumul căutat este

$$\frac{18\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{3}}{3} = \boxed{72}$$

CAPITOLUL 5

Varianta 15

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $432 : 3 = \boxed{144}$.
2. $-(-24) = \boxed{24}$.
3. Media aritmetică este $\dfrac{10+8}{2} = \boxed{9}$.
4. Impărţind pe 6 la 4 obţinem câtul 1 şi restul $\boxed{2}$.
5. Cum 1 km = 1000 m, rezultă că 3 km = $\boxed{3000}$ m.
6. Perimetrul paralelogramului este $P = 2 \cdot L + 2 \cdot l$. In cazul de faţă $L = 8$ şi $l = 5$, deci perimetrul este
$$P = 2 \cdot 8 + 2 \cdot 5 = 16 + 10 = \boxed{26}\text{ cm}$$
7. Aria sferei este $A_{sfera} = 4\pi r^2$. In cazul de faţă $r = 5cm$, deci $A_{sfera} = 4 \cdot 5^2 \cdot \pi = 4 \cdot 25 \cdot \pi = \boxed{100}\pi$.
8. Volumul prismei este produsul dintre aria bazei şi înălţime. Cum aria bazei este $l^2 = 10^2 = 100\,\text{cm}^2$, volumul va fi
$$V = 100\,\text{cm}^2 \cdot 5\,\text{cm} = \boxed{500}\text{cm}^3$$

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{A}$: Graficul lui f taie axele în punctele $A(-1,0)$ şi $B(0,1)$. Distanţa căutată este înălţimea triunghiului dreptunghic isoscel AOB, cu unghiul drept în $O(0,0)$. Cum ipotenuza are lunghimea $\sqrt{2}$, înălţimea este $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
10. $\boxed{D}$: Numerele întregi din intervalul $[-2,3]$ sunt $-2,-1,0,1,2,3$. Suma lor este $(-2)+(-1)+0+1+2+3 = 3$.
11. $\boxed{D}$: Fie $ABCD$ rombul nostru, cu $|AC| = 8$ şi $|BD| = 6$. Notăm cu O intersecţia diagonalelor. In triunghiul dreptunghic AOB, catetele sunt jumătăţi de diagonale, deci au lungimile de $|OB| = \frac{6}{2} = 3cm$, respectiv $|AO| = \frac{8}{2} = 4cm$. Folosind teorema lui Pitagora, aflam ipotenuza acestui triunghi dreptunghic

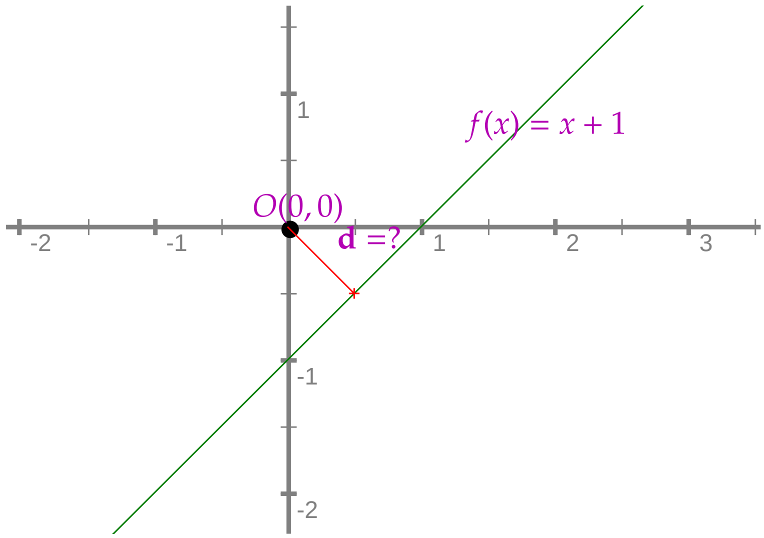


FIGURA 1. Exerciţiul 9.

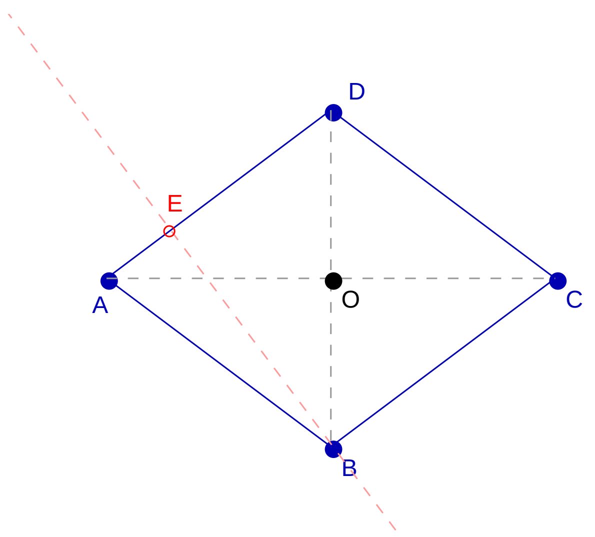


FIGURA 2. Exerciţiul 11

$|AB| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. Fie E piciorul perpendicularei din B pe AD. Aria triunghiului ABD poate fi calculată în două moduri $\frac{|AO| \cdot |BD|}{2} = \frac{|BE| \cdot |AD|}{2}$. De aici obţinem $|BE| = \frac{24}{5}$. Atunci din triunghiul dreptunghic BEA cu unghiul drept în E, avem $\sin \widehat{BAE} = \frac{\frac{24}{5}}{5} = \frac{24}{25}$.

12. $\boxed{C}$: Inalţimea este media geometrică a proiecţiilor catetelor, adică $\sqrt{2 \cdot 8} = 4$, iar ipotenuza este $2 + 8 = 10$. Atunci aria este $\frac{4 \cdot 10}{2} = 20$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Să notăm cu e numărul elevilor si cu m numărul microscoapelor. Din prima frază a enunţului, aflăm că, dacă am mai avea un elev, numărul microsoapelor ar fi egal cu numărul elevilor impărţit la 2. Aceasta ne dă prima ecuaţie : $\frac{e+1}{2} = m$, sau

$$e + 1 = 2m \qquad (1)$$

Din a doua frază a enunţului, aflăm căm ca dacă împărţim numărul elevilor la trei, ramân 4 microsoape libere sau

$$m = 4 + \frac{e}{3} \qquad (2)$$

Inlocuim pe m din ecuaţia (2) in ecuaţia (1) şi obţinem:

$$2\left(4 + \frac{e}{3}\right) = e + 1$$

Mai departe, $8 + \frac{2e}{3} = e + 1$, sau $24 + 2e = 3e + 3$. Astfel aflăm că $e = 21$ şi înlocuind în ecuaţia (2) ţinem $m = 11$.
Deci, răspuns $\boxed{11}$ microscoape.

b. Am văzut mai sus că sunt $\boxed{21}$ de elevi.

14. a. Avem

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{x}{x^3 + x^2} : \frac{(2x^2 + 4x - x - 2) - (x^2 + 3x) + 1}{2(x + 1) \cdot 3(x - 1)} \\ &= \frac{x}{x^2(x + 1)} : \frac{x^2 - 1}{6(x + 1)(x - 1)} \\ &= \frac{1}{x(x + 1)} \cdot \frac{6(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = \frac{6}{x(x + 1)} \end{aligned}$$

b. Observăm mai întâi că

$$E(x) = \frac{6x + 6 - 6x}{x(x + 1)} = \frac{6x + 6}{x(x + 1)} - \frac{6x}{x(x + 1)} = \frac{6}{x} - \frac{6}{x + 1}$$

Atunci

$$\begin{aligned} S &= 3 + E(2) + E(3) + \ldots + E(100) \\ &= 3 + \left(\frac{6}{2} - \frac{6}{3}\right) + \left(\frac{6}{3} - \frac{6}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{6}{100} - \frac{6}{101}\right) \\ &= 3 + \frac{6}{2} - \frac{6}{101} = \boxed{\frac{600}{101}} \end{aligned}$$

c. Pentru ca $\dfrac{6}{a(a + 1)}$ să fie număr întreg, a trebuie să fie divizor ai lui 6. Divizorii întregi ai lui 6 sunt $\{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$. Dintre aceştia ± 1 nu sunt în domeniul de definiţie al lui E, astfel candidaţii rămaşi sunt $\{-6, -3, -2, 2, 3, 6\}$. Examinăm caz cu caz. Avem $E(-6) = \frac{1}{5}$, $E(-3) = 1$,

$E(-2) = 3$, $E(2) = 1$, $E(3) = \frac{1}{2}$ şi $E(6) = \frac{1}{7}$. Valorile căutate sunt deci $\boxed{a \in \{-3, -2, 2\}}$.

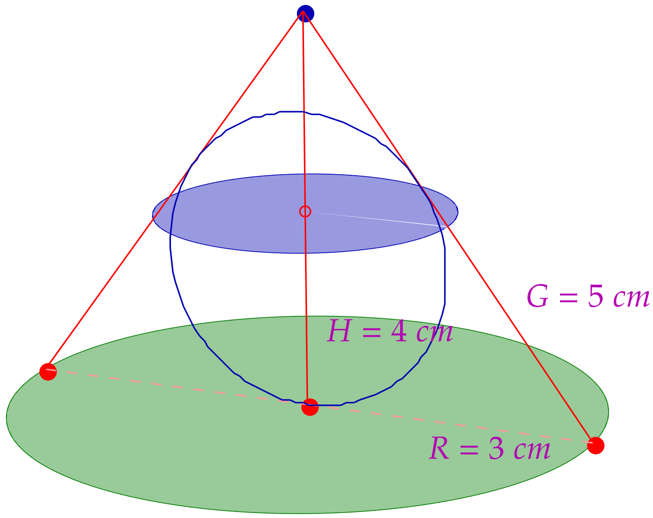


FIGURA 3. Exerciţiul 15

15. a.

b. Aria bazei este diferenţa dintre aria totală şi cea laterală, adică $24\pi - 15\pi = 9\pi\,\text{cm}^2$. Dacă notăm cu R raza cercului de bază, avem deci $\pi R^2 = 9\pi$, de unde $R = \boxed{3}$cm.

c. Fie G generatoarea şi H înălţimea conului. Exprimând aria laterală deducem $\pi RG = 15\pi$. Cum $R = 3$cm, obţinem $G = 5$ cm. Atunci $H = \sqrt{G^2 - R^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ cm. Fie r raza cercului de secţiune de la mijlocul conului. Atunci din raţiuni de asemănare $r = \dfrac{3}{2}$ cm iar înălţimea trunchiului de con este $h = \dfrac{H}{2} = 2$ cm. Atunci volumul trunchiului de con este

$$V = \frac{\pi(R^2 + Rr + r^2)h}{3} = \frac{\pi\left[3^2 + 3 \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}^2\right)\right] \cdot 2}{3} = \boxed{\frac{21\pi}{2}}\text{cm}^3$$

Comentariu Problema poate fi rezolvată şi scăzând volumul conului mic din vârf (care este $\frac{1}{8}$ din volumul conului mare) din volumul conului mare. Obţinem că volumul trunchiului de con este $\frac{7}{8}$ din volumul conului mare.

d. Secţiunea axială este un triunghi isoscel cu două din laturi de lungime 5 şi a treia (baza din figură) de lungime 6. Raza cercului înscris este $\dfrac{S}{p}$, unde S este aria şi p semiperimetrul. Să observăm că $p = \dfrac{5 + 5 + 6}{2} = 8$

şi $S = \dfrac{4 \cdot 6}{2} = 12$. Deci raza căutată este

$$\frac{12}{8} = \boxed{\frac{3}{2}}$$