BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 9

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 9

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) $\left|(1+i)^4\right| = |1+i|^4 = (\sqrt{2})^4 = \boxed{4}$.

(b) $|2\vec{i} + \vec{j}| = \sqrt{2^2+1^2} = \boxed{\sqrt{5}}$.

(c) $\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{\sqrt{2}}$.

(d) Vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$ şi $\vec{v} = 3\vec{i} + 9\vec{j}$ sunt coliniari deoarece coeficienţii lor sunt proporţionali:

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{9}.$$

(e) Distanţa este $\dfrac{|3\cdot 1 + 4\cdot 1 + 3|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \dfrac{10}{\sqrt{25}} = \boxed{2}$.

(f) Avem

$$\begin{aligned} \cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}. \end{aligned}$$

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) $\dfrac{(n+3)!}{(n+1)!} = \dfrac{(n+3)(n+2)\cdot(n+1)!}{(n+1)!} = \boxed{(n+3)(n+2)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Termenii sumei din enunţ constau din 14 termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice de raţie 2, ce are primul termen egal cu 1 respectiv ultimul termen egal cu 27. Valoarea sumei este $\dfrac{1+27}{2}\cdot 14 = \boxed{196}$.

(c) $\log_5 x = \log_5(x^2-x+1) \Rightarrow x = x^2-x+1 \Leftrightarrow x^2-2x+1 \Leftrightarrow (x-1)^2 \Leftrightarrow \boxed{x=1}$. Să nu uităm să observăm că valoarea găsită verifică condiţiile de existenţă ale ecuaţiei originale.

(d) Notând cu $t = 3^x$, ecuaţia din enunţ devine

$$t^2 - t = 6 \Leftrightarrow t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow t \in \{-2, 3\}.$$

Revenim la variabila x. Ecuaţia $3^x = -2$ nu are soluţii reale, iar ecuaţia $3^x = 3$ admite soluţia unică $\boxed{x=1}$.

(e) Deoarece $1^3 < 2^3 = 8 < 25 < 27 = 3^3 < 4^3 < 5^3$, inegalitatea este verificată de către 3 numere din cinci (anume $n \in \{3, 4, 5\}$). Probabilitatea acestui eveniment este $\boxed{p = \frac{3}{5}}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) $\boxed{f'(x) = 2x + \cos x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (x^2 + \sin x)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - \cos x\right)\Big|_0^1 = \boxed{\frac{4}{3} - \cos 1}$.

(c) Avem

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x + \cos x}{x^2 + \sin x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{\cos x}{x^2}}{1 + \frac{\sin x}{x^2}} = \frac{0}{1} = \boxed{0}.$$

(d) Continuăm calculul de la punctul (a). Obţinem

$$f''(x) = 2 - \sin x = 1 + \underbrace{1 - \sin x}_{\geq 0} \geq 1 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Prin urmare f este funcţie convexă pe $\mathbb{R}$.

(e) Printr-un calcul similar cu cel de la punctul (c), obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^3 + 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{2}{n^3}} = \frac{0}{1} = \boxed{0}.$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Evident $O_2 = 0 \cdot A + 0 \cdot I_2 \in I(A)$ şi $I_2 = 0 \cdot A + 1 \cdot I_2 \in I(A)$.

(b) Avem

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = A - I_2,$$

q.e.d.

(c) $\det A = 2 \cdot (-1) - (-1) \cdot 3 = \boxed{1} \neq 0$, deci rangul matricii A este maxim, adică egal cu $\boxed{2}$.

(d) Înmulţim identitatea de la punctul (b) cu matricea $(A + I_2)$. Obţinem

$$(A + I_2)(A^2 - A + I_2) = O_2 \iff A^3 + I_2 = O_2 \iff A^3 = -I_2.$$

(e) Folosim punctul precedent. Avem

$$A^{2007} = \left(A^3\right)^{669} = (-I_2)^{669} = (-1)^{669} \cdot I_2 = \boxed{-I_2}\,.$$

(f) **Prima soluţie.** Fie $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Q})$. Atunci prin calcul direct $AB = \begin{pmatrix} 2x+3z & 2y+3t \\ -x-z & -y-t \end{pmatrix}$ şi $BA = \begin{pmatrix} 2x-y & 3x-y \\ 2z-t & 3z-t \end{pmatrix}$. Condiţia $AX = XA$ revine la

$$\begin{cases} 2x+3z &= 2x-y \\ 2y+3t &= 3x-y \\ -x-z &= 2z-t \\ -y-t &= 3z-t \end{cases}$$

Rezultă $y = -3z$ şi $t = x+3z$, deci

$$B = \begin{pmatrix} x & -3z \\ z & x+3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z & -3z \\ z & z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x+2z & 0 \\ 0 & x+2z \end{pmatrix} = (-z)A + (x+2z)I_2 \in I(A)\,,$$

q.e.d.

A doua soluţie. Fie vectorul $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculăm $A\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ şi observăm că $\mathbf{e}$ şi $A\mathbf{e}$ sunt linear independenţi, deci formează o bază în $\mathbb{Q}^2$. Atunci există $a, b \in \mathbb{Q}$ astfel încât

$$B\mathbf{e} = aA\mathbf{e} + b\mathbf{e} \;\Leftrightarrow\; B\mathbf{e} = (aA + bI_2)\mathbf{e}\,.$$

Rezultă

$$BA\mathbf{e} = AB\mathbf{e} = A(aA\mathbf{e} + b\mathbf{e}) = (aA + bI_2)A\mathbf{e}\,.$$

Deoarece $\mathbf{e}$ şi $A\mathbf{e}$ formează o bază, rezultă

$$B\mathbf{v} = (aA + bI_2)\mathbf{v}\,, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{Q}^2 \;\Leftrightarrow\; B = aA + bI_2 \in I(A)\,.$$

(g) Fie $a, b \in \mathbb{Q}$ astfel încât $Y = aA + bI_2 \neq O_2$. Calculăm

$$\det Y = \begin{vmatrix} 2a+b & 3a \\ -a & -a+b \end{vmatrix} = -2a^2 - ab + 2ab + b^2 + 3a^2 = a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2\,.$$

Se observă că

$$\det Y = 0 \;\Leftrightarrow\; a = b = 0 \;\Rightarrow Y = O_2\,.$$

Deoarece $Y \neq O_2$ prin ipoteză, rezultă că $\det Y \neq 0$, deci Y este inversabilă.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) $\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{1+(x+2)^2} - \dfrac{1}{1+x^2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Limita din enunţ este exact derivata funcţiei f în $x = 0$, adică $\boxed{f'(0) = -\dfrac{4}{5}}$.

(c) Rafinăm rezultatul obţinut la punctul (a):

$$f'(x) = \frac{x^2-(x+2)^2}{[(1+(x+2)^2](1+x^2)} = \frac{-4(x+1)}{[(1+(x+2)^2](1+x^2)} \begin{cases} >0 & ,x\in(-\infty,-1) \\ <0 & ,x\in(-1,\infty) \end{cases}.$$

Deci f este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty,-1]$ respectiv strict crescătoare pe $[-1,\infty)$.

(d) Avem

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}[\operatorname{arctg}(x+2) - \operatorname{arctg} x] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \boxed{0}.$$

Am ţinut cont de una din proprietăţile fundamentale ale funcţiei arctangentă, anume faptul că

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

(e) Deoarece funcţia arctangentă este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, iar $x+2 > x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ rezultă că $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Pentru a doua inegalitate, am văzut că $x = -1$ este punct de maxim global, aşadar

$$f(x) \le f(-1) = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(f) Fie $a \in \mathbb{R}$. Avem de arătat că o primitivă a funcţiei $g(x) = \operatorname{arctg}(x+a)$ este funcţia definită prin

$$G(x) = (x+a)\operatorname{arctg}(x+a) - \frac{1}{2}\ln\left[(x+a)^2+1\right].$$

Într-adevăr,

$$G'(x) = \operatorname{arctg}(x+a) + \frac{x+a}{(x+a)^2+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2(x+a)}{(x+a)^2+1} = \operatorname{arctg}(x+a), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(g) Deoarece f este continuă şi ia valori pozitive, aria cerută este

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 \operatorname{arctg}(x+2)\,dx - \int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx \\
&= \left[3\cdot\operatorname{arctg} 3 - \frac{\ln 10}{2} - 2\cdot\operatorname{arctg} 2 + \frac{\ln 5}{2}\right] - \\
&\quad -\left[1\cdot\operatorname{arctg} 1 - \frac{\ln 2}{2} - 0\cdot\operatorname{arctg} 0 + \frac{\ln 1}{2}\right] \\
&= \boxed{3\operatorname{arctg} 3 - 2\operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{4}}.
\end{aligned}$$