BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 99

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 99

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) $|-4+3i| = \sqrt{(-4)^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \boxed{5}$

(b) $d(A,B) = \sqrt{(3-4)^2+(-2-3)^2} = \sqrt{1+25} = \boxed{\sqrt{26}}$

(c) $\cos\pi + \cos 2\pi = (-1)+1 = \boxed{0}$

(d) Coordonatele punctelor trebuie să satisfacă ecuaţia dreptei, de unde obţinem sistemul $\begin{cases} 3-2a+b &= 0 \\ 4+3a+b &= 0 \end{cases}$. Scăzând din a doua ecuaţie pe prima, obţinem $1+5a=0$, deci $a = \boxed{-\frac{1}{5}}$. Substituind în prima ecuaţie, deducem $3+\frac{2}{5}+b=0$, de unde $b = \boxed{-\frac{17}{5}}$.

(e) Aria triunghiului este dată de formula $\frac{|\Delta|}{2}$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 5 - 1\cdot 4 = -9$. Deci aria este $\boxed{\frac{9}{2}}$.

(f) Amplificând cu conjugatul numitorului, avem

$$\frac{-5+6i}{-6+5i} = \frac{(-5+6i)(-6-5i)}{(-6+5i)(-6-5i)} = \frac{30-36i+25i-30i^2}{36+25} = \frac{60-11i}{61}$$

Deci $a = \boxed{\frac{60}{61}}$ şi $\boxed{-\frac{11}{61}}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Deoarece $\hat{2}^3 = \hat{8} = \hat{0}$ în $\mathbb{Z}_8$, avem $\hat{2}^{2007} = \hat{2}^3\cdot\hat{2}^{2004} = \hat{0}\cdot\hat{2}^{2004} = \boxed{\hat{0}}$

(b) Folosind faptul că $C_n^k = C_n^{n-k}$ şi $C_n^n = 1$, pentru orice $n,k\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$, avem $C_7^3 - C_7^4 + C_7^7 = C_7^3 - C_7^3 + 1 = \boxed{1}$.

(c) $\log_5 x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 5^1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$. Deoarece ni s-au cerut doar soluţii strict pozitive (chiar şi cea negativă satisface condţia de existenţă a logaritmului), răspunsul este $\boxed{\sqrt{5}}$.

(d) $16^x = 64 \Leftrightarrow (4^2)^x = 4^3 \Leftrightarrow 4^{2x} = 4^3 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \boxed{\frac{3}{2}}$

(e) Deoarece $3^1 = 3 < 31$, $3^2 = 9 < 31$, $3^3 = 27 < 31$, $3^4 = 81 > 31$ şi $3^5 = 243 > 31$, notăm că 3 din cele 5 elemente ale mulţimii satisfac inegalitatea din enunţ. Deci probabilitatea este $\boxed{\frac{3}{5}}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f'(x) = \boxed{9x^8 + 14x^6}$.

(b)

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int (x^9 + 2x^7 - 1)\,dx = \left(\frac{x^{10}}{10} + \frac{x^8}{4} - x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{10} + \frac{1}{4} - 1 = \boxed{-\frac{13}{20}}$$

(c) Conform definiţiei derivatei unei funcţii într-un punct, limita este $f'(0) = \boxed{0}$.

(d) Evident $f'(x) = 9x^8 + 14x^6 > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$. Deoarece f este continuă iar $x = 0$ este un punct izolat (unde derivata nu este strict pozitivă), rezultă că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(e) Scoţând factor comun forţat n^2 atât la numitor cât şi la numărător, obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 3n}{5n^2 - 2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{3}{n}}{5 - \frac{2}{n}} = \frac{2+0}{5-0} = \boxed{\frac{2}{5}}.$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Într-adevăr $A + I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = B$

(b) Deoarece $\det B = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = \boxed{2} \neq 0$, rangul matricei B este maxim, adică $\boxed{2}$.

(c) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$

(d) Folosind repetat punctul precedent, obţinem

$$A^{2007} = A^2 \cdot A^{2005} = A \cdot A^{2005} = A^2 \cdot A^{2004} = \ldots \boxed{A}.$$

O demonstraţie ultra-riguroasă se face prin inducţie.

(e) *Verificarea.* Pentru $n = 1$ obţinem exact relaţia demonstrată la punctul (a).

Pasul de inducţie. Presupunem că $B^n = I_2+(2^n-1)A$. Atunci folosind punctele (a) şi (c) avem

$$\begin{aligned} B^{n+1} &= B^n \cdot B = [I_2 + (2^n - 1)A](I_2 + A) \\ &= I_2 + (2^n - 1)A + A + (2^n - 1)A^2 \\ &= I_2 + 2^nA + (2^n - 1)A = I_2 + (2^{n+1} - 1)A \end{aligned}$$

Conform principiului inducţiei matematice, afirmaţia din enunţ este demonstrată.

(f) Matricea $aA + bB + cI_2$ are pe prima linie, a doua coloană elementul 0, deci nu poate fi egală cu matricea C care are pe aceaşi poziţie elementul 2.

(g) La punctul (d), de fapt am arătat că $A^n = A$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Folosind punctul (e), calculăm

$$X = A^n + B^n = A + I_2 + (2^n - 1)A = I_2 + 2^nA = \begin{pmatrix} 2^n + 1 & 0 \\ 2^n & 1 \end{pmatrix}.$$

Atunci $\det(A^n + B^n) = 2^n + 1 \neq 0$, deci matricea $A^n + B^n$ este inversabilă.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f'(x) = \boxed{2x \cdot 2^{x^2} \cdot \ln 2}$.

(b) După aducere la acelaşi numitor, inegalitatea poate fi scrisă sub forma echivalentă $\dfrac{(x-1)(2-x)}{2x} \geq 0$. Cum pentru $x \in [1, 2]$, toţi factorii atât de la numitor cât şi de la numărător sunt pozitivi, inegalitatea este evidentă.

(c) Fie $x \in [1, 2]$. Efectuând înmulţirile, inegalitatea de la punctul precedent devine $1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{2} \leq \dfrac{3}{2}$.

(d) Pentru $x \in [0, 1]$ avem $f(x) \in [1, 2]$. Substituind la punctul precedent pe x cu $f(x) \in [1, 2]$, obţinem exact inegalitatea din enuţ.

(e) Pentru $u, v \in \mathbb{R}$, avem $(u + v)^2 \geq 4uv \Leftrightarrow u^2 + 2uv + v^2 \geq 4uv \Leftrightarrow u^2 - 2uv + v^2 \geq 0 \Leftrightarrow (u - v)^2 \geq 0$. Evident.

(f) Integrând inegalitatea de la punctul (d) şi folosind monotonia integralei, avem

$$\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,dx \leq \int_0^1 \frac{3}{2}\,dx = \frac{3}{2}.$$

(g) Fie $u = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx$ şi $v = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$. Atunci inegalitatea de la punctul (f) se scrie $u + v \leq \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow (u + v)^2 \leq \dfrac{9}{4}$. Folosind punctul (e), avem

$$\left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx\right)\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right) = 2uv \leq \frac{1}{2}(u + v)^2 \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{8}$$

PRO DIDACTICA VĂ UREAZĂ SUCCES LA BAC.
DE LA TOAMNĂ VĂ AŞTEPTĂM CU ÎNTREBĂRI DIN MATERIA DE FACULTATE.