BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 98

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 98

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Conjugatul numărului complex $(2-3i)^2 = 4-12i+9i^2 = 4-12i-9 = -5-12i$ este $\boxed{-5+12i}$.

(b) $|AC| = \sqrt{(1-0)^2+(-1-6)^2} = \sqrt{50} = \boxed{5\sqrt{2}}$

(c) Aria triunghiului ABC este dată de $\frac{|\Delta|}{2}$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ -1 & 7 & 0 \end{vmatrix} =$ $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = 3\cdot 7 - (-1)\cdot 3 = 24$. Prin urmare aria este $\boxed{12}$.

(d) Calculăm şi lungimile celorlalte două laturi

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(1-4)^2+(-1-2)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \\ |BC| &= \sqrt{(4-0)^2+(2-6)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

Deoarece $|AB|^2+|BC|^2 = |AC|^2$, conform reciprocei teoremei lui Pitagora, triunghiul ABC este dreptunghic cu ipotenuza AC. Atunci

$$\sin\widehat{ABC} = \sin 90^\circ = \boxed{1}.$$

(e) Coordonatele punctelor A şi C trebuie să satisfacă ecuaţia dreptei, deci avem $\begin{cases} 1+m\cdot(-1)+n &= 0 \\ 0+m\cdot 6+n &= 0 \end{cases}$. Scăzând din a doua ecuaţie pe prima obţinem $-1+7m=0$, de unde $m = \boxed{\frac{1}{7}}$. Substituind în a doua ecuaţie, deducem şi $n = \boxed{-\frac{6}{7}}$.

(f) **Prima rezolvare.** Ecuaţia dreptei $AC\ :\ x+\frac{1}{7}-\frac{6}{7}=0$, găsită la punctul precedent poate fi scrisă sub forma $7x+y-6=0$. Distanţa de la punctul $B(4,2)$ la această dreaptă este $\frac{7\cdot 4+2-6}{\sqrt{7^2+1^2}} = \frac{24}{\sqrt{50}} = \boxed{\frac{12\sqrt{2}}{5}}$.

A doua rezolvare. Fie d distanţa de la punctul B la dreapta AC. Atunci $\text{Aria}_{ABC} = \frac{d\cdot|AC|}{2}$, de unde folosind punctele (b) şi (c), obţinem

$$d = \frac{2\cdot \text{Aria}_{ABC}}{|AC|} = \frac{2\cdot 12}{5\sqrt{2}} = \boxed{\frac{12\sqrt{2}}{5}}.$$

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Observând că $x * y = y * x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, este suficient să căutăm $e \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $x*e = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Această relaţie revine la $xe-2x-2e+6 = x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x(e-3)-2(e-3) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x-2)(e-3) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e = \boxed{3}$.

(b) $3 * x = 11 \Leftrightarrow 3x - 2\cdot 3 - 2x + 6 = 11 \Leftrightarrow x = \boxed{11}$

(c) Cum $C_5^2 = \dfrac{5!}{2!\cdot 3!} = \dfrac{3!\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 3!} = 10$, valoarea determinantului este

$$\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4\cdot 2 - 3\cdot 10 = \boxed{-22}.$$

(d) Deoarece $f(1) = 2007\cdot 1 - 2006 = 1$, avem $(f\circ f)(1) = f(f(1)) = f(1) = \boxed{1}$.

(e) $\log_3 \dfrac{x+2}{27} = -3 \Leftrightarrow \dfrac{x+2}{27} = 3^{-3} \Leftrightarrow x+2 = 27\cdot\dfrac{1}{27} \Leftrightarrow x+2 = 1 \Leftrightarrow x = \boxed{-1}$. Nu putem încheia fără a nota faptul că soluţia găsită convine.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f'(x) = \dfrac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}} = \boxed{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}$.

(b) Conform definiţiei derivatei unei funcţii într-un punct, limita este exact

$$f'(-1) = \boxed{\frac{-1}{\sqrt{2}}}.$$

(c) Conform teoremei Leibniz-Newton,

$$\int_0^1 f'(x)\,dx = f(1) - f(0) = \sqrt{1^2+1} - \sqrt{0^2+1} = \boxed{\sqrt{2}-1}.$$

(d) Cum $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, graficul funcţiei f nu are asimptote orizontale. Căutăm o asimptotă oblică de forma $y = mx + n$. Atunci

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1 \\ n &= \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} [\sqrt{x^2+1} - x] \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+1)-x^2}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = 0 \end{aligned}$$

Deci dreapta de ecuaţie $\boxed{y = x}$ este asimptotă oblică la graficul funcţiei f către ∞.

(e) Am văzut la punctul precedent că $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2007} \cdot \frac{f(n)}{n} = \boxed{\frac{1}{2007}}.$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Avem $1 = 1 + \varepsilon \cdot 0 \in G$ şi $w = 1 + \varepsilon \cdot 1 \in G$.

(b) **Prima soluţie.** Avem

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1-2i\sqrt{3}+(i\sqrt{3})^2}{4} = \frac{-2-2i\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{-1-i\sqrt{3}}{4} = -\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} - 1 = -\varepsilon - 1 \end{aligned}$$

Atunci $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0 \Rightarrow (\varepsilon - 1)(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1) = 0 \Rightarrow \varepsilon^3 - 1 = 0$.

A doua soluţie. Se evede că ε este rădăcină complexă nereală de ordinul trei a unităţii. Deci $\varepsilon^3 = 1$. De aici rezultă $0 = \varepsilon^3 - 1 = (\varepsilon - 1)(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1)$. Cum $\varepsilon \neq 1$ obţinem şi prima identitate cerută în enunţ.

(c) Fie $z_1 = a + \varepsilon b$ şi $z_2 = c + \varepsilon d$. Atunci $z_1 + z_2 = (a + c) + \varepsilon(b + d) \in G$, căci $a + c \in \mathbb{Z}$ şi $b + d \in \mathbb{Z}$. Pe de altă parte

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a + \varepsilon b)(c + \varepsilon d) = ac + \varepsilon(ad + bc) + \varepsilon^2 bd \\ &= ac + \varepsilon(ad + bc) + (-\varepsilon - 1)bd \\ &= (ac - bd) + \varepsilon(ad + bc - bd) \in G \end{aligned}$$

căci $ac - bd, ad + bc - bd \in \mathbb{Z}$.

(d) Folosind faptul că $w = 1 + \varepsilon = -\varepsilon^2$, avem $(-\varepsilon) \cdot w = (-\varepsilon)(1 + \varepsilon) = \varepsilon^3 = 1$. Cum $-\varepsilon = 0 + \varepsilon \cdot (-1) \in G$, rezultă că $w \in H$.

(e) Folosind punctul (b), avem $w^2 = (1+\varepsilon)^2 = 1+2\varepsilon+\varepsilon^2 = (1 = \varepsilon+\varepsilon^2)+\varepsilon = 0+\varepsilon = \varepsilon$. Atunci folosind iar punctul (b), avem

$$w^{2007} = (w^2)^{1003} \cdot w = \varepsilon^{1003} \cdot w = (\varepsilon^3)^{334} \cdot \varepsilon \cdot (1+\varepsilon) = 1 \cdot (\varepsilon^2 + \varepsilon) = \boxed{-1}.$$

(f) Fie $z = a + b\varepsilon \in G$ şi $z' = c + \varepsilon d \in G$ astfel ca $zz' = 1$. Atunci

$$|z|^2 = |a+\varepsilon b|^2 = \left|\left(a - \frac{b}{2}\right) + ib\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2 = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} = a^2 - ab + b^2.$$

Similar se arată că $|z'|^2 = c^2 - cd + d^2$. Dar din $zz' = 1$ rezultă $|z|^2 \cdot |z'|^2 = 1 \Leftrightarrow (a^2-ab+b^2)(c^2-cd+d^2) = 1$. Cum $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ şi fiecare din paranteze este un număr pozitiv (orice modul este pozitiv!) rezultă că $a^2 - ab + b^2 = 1 \Rightarrow |z| = 1$.
Observaţie. Am avut nevoie doar de faptul că $z \in H \Rightarrow |z|^2 \in \mathbb{N}$. Demonstraţia de mai sus doar pare complicată, în realitate este uşoară.

(g) Continuăm punctul precedent. Fie $z = a + \varepsilon b \in H$. Atunci $a^2 - ab + b^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + (a-b)^2 = 2$. Cum $a, b \in \mathbb{Z}$, să observăm că $a, b \in \{-1, 0, 1\}$, altfel $a^2 > 2$ sau $b^2 > 2$. Examinând toate cazurile posibile se vede că valorile lui $a, b \in \{-1, 0, 1\}$ pentru care $a^2 - ab + b^2 = 1$ corespund valorilor lui

$$\boxed{z \in \{\varepsilon, -\varepsilon, 1+\varepsilon, 1, -1-\varepsilon, -1\}}.$$

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Deoarece nu vrem să calculăm o derivată laterală în $x = 0$, observăm că putem extinde domeniul de definiţie al funcţiei f la cel maximal $(-1, \infty)$. Pentru orice $x > -1$, avem $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \boxed{\dfrac{-x}{1+x}}$.

(b) Pentru orice $x > 0$, conform punctului (a), $f'(x) = -\dfrac{x}{1+x} < 0$, deci f este strict descrescătoare pe $[0, \infty)$.

(c) Am văzut la punctul precedent că f este strict descrescătoare pe $[0, \infty)$. Atunci pentru orice $x \geq 0$, avem $f(x) \leq f(0) = 0$.

(d) Având un caz de nedeterminare $\frac{0}{0}$, folosim regula lui l'Hopital. Obţinem

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{1+x} = \boxed{0}.$$

(e) Folosind pe parcurs integrarea prin părţi, avem

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \ln(1+t)\,dt - \int_0^x t dt \\ &= \int_0^x t' \ln(1+t)\,dt - \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^x \\ &= t\ln(1+t)\Big|_0^x - \int_0^x t\frac{1}{1+t}\,dt - \frac{x^2}{2} \\ &= x\ln(1+x) - \frac{x^2}{2} - \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt \\ &= x\ln(1+x) - \frac{x^2}{2} - (t - \ln(1+t))\Big|_0^x \\ &= \boxed{x\ln(1+x) - \frac{x^2}{2} - x + \ln(1+x)} \end{aligned}$$

(f) Deoarece conform punctului (c) avem $F'(x) = f(x) \le 0$, $\forall x \ge 0$, rezultă că F este descrescătoare pe $[0, \infty)$.

(g) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Conform (c) avem $f\left(\frac{1}{n}\right) \le 0 \Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \Leftrightarrow n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \le 1 \Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \ln e \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le e < 3$.

PRO DIDACTICA VĂ UREAZĂ SUCCES LA BAC.
DE LA TOAMNĂ VĂ AŞTEPTĂM CU ÎNTREBĂRI DIN MATERIA DE FACULTATE.