# BAC 2007

## Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 97

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

# Varianta 97

## 1. Subiectul I.

**Rezolvare.**

(a) Cu formula uzuală, distanţa este

$$\sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2+(1-0)^2} = \boxed{\sqrt{3}}$$

(b) Distanţa este $\dfrac{|1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1-6|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \boxed{\sqrt{3}}$.

(c) $\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{0}$.

(d) Cubul are $6$ feţe fiecare de arie $1^2 = 1$, deci aria totală este $6\cdot 1 = \boxed{6}$.

(e) Folosind formula sumei de cuburi, descompunem în factori $x^3+8 = x^3+2^3 = (x+2)(x^2-2x+4)$.
Ecuaţia de gradul doi $x^2-2x+4=0$ are discriminantul $\Delta = 2^2-4\cdot 4 = -12$. Fiind negativ, îl vom scrie sub forma $\Delta = (2i\sqrt{3})^2$. Rădăcinile ecuaţiei sunt $x_{1,2} = \dfrac{2\pm 2i\sqrt{3}}{2} = 1\pm i\sqrt{3}$. Deci $x_1 = \boxed{1+i\sqrt{3}}$, $x_2 = \boxed{1-i\sqrt{3}}$.
Ecuaţia $x+2=0$ are rădăcina $x_3 = \boxed{-2}$.

(f) Aria cercului este $\pi R^2 = \boxed{9\pi}$.

## 2. Subiectul II.1.

**Rezolvare.**

(a) Deoarece în $\mathbb{Z}_5$, avem $\hat{3}\cdot\hat{2} = \hat{1}$, inversul lui $\hat{3}$ este $\boxed{\hat{2}}$.

(b) Raţia acestei progresii este $q=-1$, iar primul termen $a_1 = 1$. Suma primilor $2007$ termeni este

$$a_1\cdot\frac{q^{2007}-1}{q-1} = \frac{(-1)^{2007}-1}{-1-1} = \frac{-2}{-2} = \boxed{1}$$

(c) $\log_3(x^2+2) = 3 \Leftrightarrow x^2+2 = 3^3 = 27 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = \boxed{\pm 5}$

(d) Cum pentru orice număr real $x$, avem $x^2 \geq 0$, rezultă $x^2+1 \geq 1 > 0$. Deci mulţimea dată este $\boxed{\mathbb{R}}$.

(e) Dintre cele $21$ de elemente, exact $3$ sunt divizibile cu $9$, anume $0, 9, 18$. Probabilitatea este atunci $\frac{3}{21} = \boxed{\frac{1}{7}}$.

### 3. Subiectul II.2.

**Rezolvare.**

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \boxed{-\frac{1}{x^2}}$.

(b) Conform definiţiei derivatei într-un punct, limita este $\boxed{f'(1) = -1}$.

(c) Deoarece $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, graficul funcţiei $f$ are spre $\infty$ asimptota orizontală $\boxed{y = 0}$.

(d) $\lim_{n\to\infty} nf(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = \boxed{1}$.

(e) $\int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = \boxed{1}$.

### 4. Subiectul III.

**Rezolvare.**

(a) Cum elementele lui $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}$ formează mulţimea $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, rezultă că $A \in M$.

(b) Numărul elementelor mulţimii $M$ coincide cu numărul permutărilor mulţimii $\{1, 2, \ldots, 9\}$, adică $\boxed{9! = 362880}$.

(c) Avem $\det A = 0$, deoarece a doua coloană este media aritmetică a celorlalte două, deci combinaţie liniară a primei şi ultimei coloane.

(d) Căutăm o matrice inversabilă din $M$ printre cele obţinute distorsionând uşor matricea $A$. De exemplu,

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 9 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & -15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -3 & -15 \end{vmatrix} = 27 \neq 0\,.$$

Deci putem lua $C = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}}$.

(e) Fie $B \in M$ inversabilă. Presupunem prin absurd că $B^{-1} \in M$. Atunci **toate elementele matricii $B^{-1}$ sunt strict pozitive.** Prin urmare, matricea $BB^{-1}$ are numai elemente strict pozitive ▼[detalii]

Dacă $b_{ij}$ şi $x_{ij}$ sunt elementele matricilor $B$ respectiv $B^{-1}$, atunci elementul de indice $i, j$ al matricii $BC$ este egal cu

$$b_{i1}x_{1j} + b_{i2}x_{2j} + b_{i3}x_{3j} > 0\,.$$

Prin urmare $BB^{-1} \neq I_2$ (căci $I_2$ conţine şi pe $0$ printre elemente), contradicţie.

(f) Am văzut la punctul (c) că rangul matricei $A$ din $M$ este doi. De asemenea, matricea $C$ găsită la (d) este de rang trei. Arătăm că nici o matrice din $M$ nu poate fi de rang unu.
Presupunem prin absurd contrariul şi fie $D \in M$ cu $\operatorname{rang} D = 1$. Permutând eventual liniile şi coloanele matricii $D$, putem presupune că elementul lui $D$ din prima linie şi prima coloană este egal cu $1$. Atunci matricea $D$ este de forma

$$D = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ c & ac & bc \\ d & ad & bd \end{pmatrix}.$$

unde $a, b, c, d$ sunt **distincte două câte două şi diferite de** $1$**.** Observăm că numerele $\{ac, bc, ad, bd\}$ sunt toate distincte şi compuse (nu sunt prime) în mulţimea $\{1, 2, \ldots, 9\}$. Pe de altă parte, nici unul dintre aceste numere nu poate fi pătratul unui număr prim. ▼[detalii]

De exemplu, din $ac = 4$ rezultă $a = c = 2$ sau $a = 1$ sau $c = 1$, imposibil!

Aşadar nici unul dintre numerele $\{ac, bc, ad, bd\}$ **nu** este în mulţimea $\{2, 3, 4, 5, 7, 9\}$. Am obţinut

$$\{ac, bc, ad, bd\} \subset \{6, 8\},$$

absurd, deoarece cele patru numere sunt presupuse distincte prin ipoteză.

(g) Am văzut la punctul (c) că matricea $A$ are determinantul egal cu zero. Având elemente distincte, permutând în $3! = 6$ moduri liniile sale, după care permutându-i în alte $3! = 6$ moduri coloanele, obţinem $6 \cdot 6 = \boxed{36}$ matrici **distincte** din $M$, toate având determinantul egal cu $0$.

## 5. Subiectul IV.

**Rezolvare.**

(a) Pentru orice $x > 0$, avem

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln\left(x + \frac{2}{3}\right) - \ln x + \left(x + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{x + \frac{2}{3}} - \frac{1}{x}\right) \\ &= \ln\left(x + \frac{2}{3}\right) - \ln x + \frac{x + \frac{2}{3} - \frac{1}{3}}{x + \frac{2}{3}} - \frac{x + \frac{1}{3}}{x} \\ &= \ln\left(x + \frac{2}{3}\right) - \ln x + 1 - \frac{\frac{1}{3}}{x + \frac{2}{3}} - 1 - \frac{\frac{1}{3}}{x} \\ &= \boxed{\ln\left(x + \frac{2}{3}\right) - \ln x - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x + \frac{2}{3}} + \frac{1}{x}\right)} \\ &= \boxed{\ln\frac{x + \frac{2}{3}}{x} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x + \frac{2}{3}} + \frac{1}{x}\right)} \end{aligned}$$

**Comentariu:** La punctul (b) folosim forma lui $f'$ din penultima linie, iar la punctul (f) folosim forma lui $f'$ din ultima linie.

(b) Continuăm calculele de la punctul precedent. Pentru orice $x > 0$ avem

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{x+\frac{2}{3}} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(x+\frac{2}{3})^2} + \frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{x+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}{(x+\frac{2}{3})^2} + \frac{1-3x}{3x^2} \\ &= \frac{3x^2(x+1)+(1-3x)(x+\frac{2}{3})^2}{3x^2(x+\frac{2}{3})^2} \\ &= \frac{3x^3+3x^2+x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}-3x^3-4x^2-\frac{4}{3}x}{3x^2(x+\frac{2}{3})^2} \\ &= \frac{4}{3x^2(3x+2)^2} \end{aligned}$$

(c) Cum $f''(x) > 0$, pentru orice $x > 0$, rezultă că $f'$ este strict crescătoare pe $(0, \infty)$.

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} f''(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4}{3x^2(3x+2)^2} = \boxed{0}$

(e) Conform teoremei Leibniz-Newton,

$$\begin{aligned} \int_1^e f'(x) &= f(e) - f(1) \\ &= \left(e+\frac{1}{3}\right)\left(\ln\left(e+\frac{2}{3}\right) - \ln e\right) - \left(1+\frac{1}{3}\right)\left(\ln\left(1+\frac{2}{3}\right) - \ln 1\right) \\ &= \boxed{\left(e+\tfrac{1}{3}\right)\left(\ln\left(e+\tfrac{2}{3}\right)-1\right) - \tfrac{4}{3}\ln\tfrac{5}{3}} \end{aligned}$$

(f) Avem $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln\frac{x+\frac{2}{3}}{x} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+\frac{2}{3}} + \frac{1}{x}\right)\right] = \ln 1 - \frac{1}{3}(0+0) = 0$. Cum $f'$ este strict crescătoare (conform (c)), rezultă că pentru orice $x > 0$ avem $f'(x) < \lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$, iar de aici obţinem $f$ strict descrescătoare pe $(0, \infty)$.

(g) Să observăm că $f(x) = \ln\left(\frac{x+\frac{2}{3}}{x}\right)^{x+\frac{1}{3}} = \ln\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{x+\frac{1}{3}}$. Conform punctului precedent $f$ este descrescătoare, deci $f(n) > f(n+1)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. De aici, rezultă $e^{f(n)} > e^{f(n+1)}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, adică exact inegalitatea din enunţ.

Pro Didactica vă urează succes la BAC.
De la toamnă vă aşteptăm cu întrebări din materia de facultate.