BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 96

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 96

1. Subiectul I

Rezolvare.

(a) $\overline{2-5i} = \boxed{2+5i}$.

(b) Cu formula distanţei (teorema lui Pitagora) avem

$$|AC| = \sqrt{(5-1)^2 + (1-5)^2} = \boxed{4\sqrt{2}}$$

(c) Ecuaţia se rescrie sub forma $x^2 + y^2 = 5^2$, de unde este clar ca lumina zilei că cercul are centrul în origine şi raza $\boxed{r = 5}$.

(d) Panta dreptei AC este $m = \dfrac{1-5}{5-1} = \boxed{-1}$.

(e) Deoarece $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\forall\alpha \in \mathbb{R}$ rezultă că $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$, de unde $\sin x \in \left\{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. Din ipoteză $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, aşadar $\sin x > 0$, deci $\boxed{\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.

(f) Avem

$$a + bi = \frac{11+i}{1-11i} = \frac{i(1-11i)}{1-11i} = i\,,$$

deci $\boxed{a = 0}$ şi $\boxed{b = 1}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - (-3) \cdot 2 = \boxed{10}$.

(b) Rangul matricii este cel puţin unu, deoarece are coeficienţi nenuli (toţi coeficienţii sunt, de fapt, nenuli). Pe de altă parte, determinantul matricii este egal cu zero: $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - 1 \cdot (-2) = 0$ (sau observăm că liniile matricei sunt identice). Prin urmare rangul matricii este strict mai mic decât doi. Aşadar rangul matricii este egal cu $\boxed{1}$.

(c) $\log_3 x = -2 \iff x = 3^{-2} = \boxed{\frac{1}{9}}$.

(d) $9^x - 3 = 0 \iff 9^x = 3 \iff 3^{2x} = 3^1 \iff 2x = 1 \iff \boxed{x = \frac{1}{2}}$.

(e) Din tabelul

n	1	2	3	4	5
n^3	1	8	27	64	125
$n+6$	7	8	9	10	11

constatăm că inegalitatea $n^3 < n+6$ este satisfăcută de numai un număr din cinci, anume $n = 1$. Probabilitatea acestui eveniment este $\boxed{p = \frac{1}{5}}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) $\boxed{f'(x) = e^x + 2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Avem

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (e^x + 2x + 1)\,dx = (e^x + x^2 + x)\Big|_0^1 = e + 2 - 1 = \boxed{e+1}.$$

(c) Limita din enunţ este tocmai derivata funcţiei f în $x = 0$, adică $\boxed{f'(0) = 3}$.

(d) Cu formula de la punctul (a) constatăm că $f'(x) = e^x + 2 > 2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Deci funcţia f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(e) Dând factor forţat pe n^2 atât la numărător cât şi la numitor obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3}{5n^2-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n^2}}{5-\frac{2}{n^2}} = \frac{1+0}{5-0} = \boxed{\frac{1}{5}}.$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Discriminantul ecuaţiei $x^2 + x + 1 = 0$ este $\Delta = -3$, iar rădăcinile sunt

$$\boxed{x_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}}.$$

(b) Ecuaţia $x^2 + x = 0$ are soluţiile $x \in \{-1, 0\}$, deci mulţimea soluţiilor inecuaţiei $x^2 + x < 0$ este intervalul $\boxed{(-1, 0)}$. Am ţinut cont şi de faptul că coeficientul dominant al ecuaţiei de gradul doi asociate este **pozitiv**.

(c) Într-adevăr,

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n^2+n}=\frac{1}{g(n)},\quad \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

(d) Folosind punctul anterior, suma din enunţ se transformă într-o sumă telescopică:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{g(1)}+\frac{1}{g(2)}+\ldots+\frac{1}{g(n)}\\ &= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2007}-\frac{1}{2008}\right)\\ &= 1-\frac{1}{2008}=\boxed{\frac{2007}{2008}}. \end{aligned}$$

(e) Intr-adevăr $\left(X+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=X^2+2\cdot X\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=X^2+X+1$.

(f) Una dintre idei pleacă de la rezultatul obţinut la punctul (b): trebuie să reţinem doar faptul că **există** $x\in\mathbb{R}$ **astfel încât** $g(x)<0$. De exemplu, $g\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}<0$. Presupunând prin absurd că există polinoamele s,t cu coeficienţie **reali** astfel încât $g=s^2+t^2$, rezultă

$$-\frac{1}{4}=g\left(-\frac{1}{2}\right)=\left[s\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2+\left[t\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2\geq 0,$$

absurd!

(g) Avem

$$X^2+X=\left(X+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=\left(X+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{i}{2}\right)^2,$$

deci putem alege $\boxed{u=X+\frac{1}{2}}$ respectiv $\boxed{v=\frac{i}{2}}$. Această alegere **nu este unică.**

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) $\boxed{f'(x)=2007x^{2006}}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(b) Evident,

$$(x-1)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)=\frac{(x-1)(2-x)}{2x}\geq 0,\quad \forall x\in[1,2].$$

(c) Dezvoltând mai departe inegalitatea de la punctul precedent, avem

$$(x-1)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\geq 0 \Leftrightarrow 1-\frac{x}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{x}{2}\leq 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},\quad \forall x\in[1,2].$$

(d) Fie $x \in [0,1]$. Atunci $f(x) = x^{2007} + 1 \in [1,2]$. Substituind pe x cu $f(x)$ în inegalitatea de la punctul precedent obţinem tocmai

$$\frac{1}{f(x)} + \frac{f(x)}{2} \leq \frac{3}{2}\,.$$

(e) Fie $u, v \in \mathbb{R}$. Avem inegalităţile echivalente:

$$(u+v)^2 \geq 4uv \iff u^2 + 2uv + v^2 \geq 4uv \iff u^2 - 2uv + v^2 \geq 0 \iff (u-v)^2 \geq 0\,.$$

Ultima inegalitate este evident adevărată, de unde rezultă şi validitatea celei din enunţ.

(f) Integrând pe intervalul $[0,1]$ inegalitatea de la punctul (d) obţinem

$$\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{f(x)} + \frac{f(x)}{2}\right) dx \leq \int_0^1 \frac{3}{2}\,dx = \frac{3}{2},$$

q.e.d.

(g) Introducem notaţiile

$$u = \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx, \quad w = \int_0^1 f(x)\,dx, \quad v = \frac{1}{2}\cdot w\,.$$

Evident $u, v, w \geq 0$. Combinând inegalitatăţile de la (e) şi (f) obţinem

$$4uv \leq (u+v)^2 \leq \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4},$$

de unde, prin înmulţire cu $\frac{1}{2}$ obţinem

$$uw = 4uv \cdot \frac{1}{2} \leq \frac{9}{8},$$

adică tocmai ceea ce trebuia demonstrat.