BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 95

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 95

1. Subiectul I

Rezolvare.

(a) Numărul din enunţ este pur imaginar:

$$i^{20} + i^{21} + i^{22} = i^{20}(1 + i + i^2) = 1 \cdot [1 + i + (-1)] = i\,.$$

Partea sa reală este $\boxed{0}$.

(b) Avem

$$\left|i^{30} + i^{31}\right| = \left|i^{30}(1 + i)\right| = |i|^{30} \cdot |1 + i| = 1 \cdot \sqrt{2} = \boxed{\sqrt{2}}\,.$$

(c) Aria triunghiului este $S = \frac{1}{2}|\Delta|$, unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -12\,.$$

Deci, $S = \frac{12}{2} = \boxed{6}$.

(d) $\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{5\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{6} + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \boxed{0}$. În general, $\cos(\pi - t) = -\cos t$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Evident, puteam să calculăm explicit $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ respectiv $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(e) Deoarece $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \overrightarrow{PM}$ rezultă $|MN| = |MP|$. De altfel, putem calcula explicit lungimile acestor segmente, ambele fiind egale cu $\frac{1}{\sqrt{2}}$. De asemenea, mai putem observa că M este chiar mijlocul segmentului $[NP]$.

(f) Funcţia sinus este impară. De exemplu, luând $t = -\frac{\pi}{4}$ rezultă $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \in (-1, 0)$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) De exemplu, progresia aritmetică cu cinci termeni

$$5,\ 11,\ 16,\ 21,\ 26$$

conţine numerele 5 şi 11.

(b) Luăm $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Evident $\det A = 2$.

(c) Alegem $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Deoarece are o linie nulă, $\det B = 0$, deci rangul matricii este cel mult egal cu doi. Pe de altă parte, matricea B conţine o submatrice pătratică inversabilă de ordinul doi, deci $\operatorname{rang} B = 2$.

(d) De exemplu, alegând $\boxed{a = 2,\ b = 3}$ avem $\log_2 a = \log_3 b = 1$.

(e) $\boxed{\text{Înmulţirea}}$ numerelor reale are elementul neutru $e = 1$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare. Câteodată ne va fi util să rescriem expresia funcţiei sub forma $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$.

(a) Avem într-adevăr

$$\begin{aligned} \log_2 f(2) + \log_2 f(3) + \ldots + \log_2 f(15) &= \log_2 \frac{3}{2} + \log_2 \frac{4}{3} + \ldots + \log_2 \frac{16}{15} \\ &= \log_2 \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{16}{15} \right) \\ &= \log_2 \frac{16}{2} = \log_2 8 = 3 \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

(b) Avem $\boxed{f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}}$, $\forall x \in (0, \infty)$.

(c) Folosind formula găsită la punctul precedent constatăm că $f'(x) < 0$, $\forall x \in (0, \infty)$, aşadar f este strict descrescătoare şi $\boxed{\text{nu are}}$ puncte de extrem.

(d) Deoarece $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \infty$, graficul lui f admite asimptota verticală de ecuaţie $\boxed{x = 0}$. De asemenea, deoarece $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$, graficul lui f admite către ∞ asimptota orizontală de ecuaţie $\boxed{y = 1}$.

(e)

$$\int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = (x + \ln x)\Big|_1^e = e - 1 + 1 = \boxed{e}.$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Fie $A = X(a),\ B = X(b)$ două matrici oarecare din G. Atunci

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = X(a+b) \in G,$$

deoarece $a, b \in \mathbb{Z}$ implică evident $a + b \in \mathbb{Z}$. Cu această ocazie observăm că oricare două matrici din G comută, aşadar

$$X(a)X(b) = X(b)X(a) = X(a+b), \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}.$$

(b) Evident $I_2 = X(0) \in G$. Pe de altă parte, orice matrice $X(a) \in G$ are elementul de pe prima linie şi prima coloană egal cu 1, deci acel element este nenul. În concluzie, $X(a) \neq O_2$, $\forall a \in \mathbb{Z}$. Cu alte cuvinte, $O_2 \notin G$.

(c) Această teoremă este în manual şi este adevărată pentru matrici pătratice arbitrare. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} u & v \\ w & t \end{pmatrix}$ două matrici arbitrare din $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$. Atunci $AB = \begin{pmatrix} au + bw & av + bt \\ cu + dw & cv + dt \end{pmatrix}$ şi deci

$$\begin{aligned} \det(AB) &= (au + bw)(cv + dt) - (cu + dw)(av + bt) \\ &= acuv + adut + bcwv + bdwt - acuv - bcut - adwv - bdwt \\ &= ad(ut - wv) - bc(ut - wv) \\ &= (ad - bc)(ut - wv) = \det A \cdot \det B . \end{aligned}$$

Observaţie. Dacă $A, B \in G$ atunci $\det A = \det B = \det(AB) = 1$.

(d) Fie $A = X(a) \in G$, unde $a \in \mathbb{Z}$. Luând $C = X(-a)$ şi ţinând cont de propoziţia demonstrată la punctul (a), rezultă

$$CA = AC = X(a)X(-a) = X(0) = I_2 .$$

(e) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Folosind din nou în mod repetat punctul (a) obţinem

$$X^n(3) = X\left(\underbrace{3 + 3 + \ldots + 3}_{n \text{ ori}}\right) = X(3n) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

(f) Deoarece $\det X(3) = \boxed{1}$, rangul acestei matrici este egal cu $\boxed{2}$.

(g) Deoarece $AB = BA$, $\forall A, B \in G$ rezultă că

$$X(1)^{2007} = X(2007) = AB = BA ,$$

aşadar $D = X(1)$ satisface cerinţele problemei.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Avem

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{-1}{(1+x^2)^2} \cdot 2x = \boxed{-\frac{4x}{(1+x^2)^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(b) Folosind formula găsită la punctul precedent, este clar că $f'(x) < 0$, $\forall x \in (0, \infty)$. Prin urmare f este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$.

(c) Deoarece

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1+x^2} = 0$$

graficul lui f admite către ∞ asimptota orizontală de ecuaţie $\boxed{y = 0}$.

(d) Funcţia f este o funcţie pară. De exemplu, $\boxed{a = 1,\ b = -1}$ satisfac relaţia $f(a) = f(b) = 1$.

(e) Studiem inegalitatea din enunţ printr-un şir de propoziţii echivalente. Fie $x \in (0, \infty)$. Atunci

$$f(x) \le \frac{1}{x} \ \Leftrightarrow\ \frac{2}{1+x^2} \le \frac{1}{x} \ \Leftrightarrow\ \frac{1+x^2}{2} \ge x \ \Leftrightarrow\ \frac{(1-x)^2}{2} \ge 0\,.$$

Ultima inegalitate este trivial adevărată! Ipoteza $x \in (0, \infty)$ a fost folosită în mod esenţial.

(f) Avem

$$\int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e \frac{2}{1+x^2}\,dx = 2\mathrm{arctg}\,x\Big|_1^e = \boxed{2\left(\mathrm{arctg}\,e - \frac{\pi}{4}\right)}\,.$$

(g) Integrăm inegalitatea de la (d) pe intervalul $[1, e]$. Folosind monotonia integralei obţinem

$$\int_1^e f(x)\,dx \le \int_1^e \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big|_1^e = 1\,.$$

Folosind acum rezultatul de la punctul precedent, rezultă

$$2\left(\mathrm{arctg}\,e - \frac{\pi}{4}\right) \le 1 \ \Leftrightarrow\ \mathrm{arctg}\,e \le \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi+2}{4}\,,$$

q.e.d.