BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 94

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 94

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Folosind faptul că modulul raportului este egal cu raportul modulelor, obţinem $\left|\frac{4-3i}{4+3i}\right| = \frac{|4-3i|}{|4+3i|} = \frac{\sqrt{16+9}}{\sqrt{16+9}} = \boxed{1}$.

(b) Lungimea segmentului $[AC]$ este

$$AC = \sqrt{(3-4)^2 + (12-13)^2} = \sqrt{1+1} = \boxed{\sqrt{2}}$$

(c) Numărul complex se scrie $z = 6 - 2i - 3i + i^2 = 6 - 5i - 1 = 5 - 5i$, deci partea sa reală este $\boxed{5}$.

(d) Coordonatele punctelor A şi C verifică ecuaţia dreptei. Avem atunci

$$\begin{cases} 3 + 12a + b = 0 \\ 4 + 13a + b = 0 \end{cases}$$

Scăzând prima ecuaţie din a doua, obţinem $1 + a = 0 \Rightarrow a = -1$. Înlocuind acum a în prima ecuaţie, avem $3 - 12 + b = 0 \Rightarrow b = 9$. Deci $\boxed{a = -1,\ b = 9}$.

(e) Aria triunghiului ABC se calculează după formula $S = \frac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 12 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 13 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 48 + 26 - 8 - 39 - 24 = 9$. Deci $\boxed{S = \frac{9}{2}}$.

(f) După ce simplificăm fracţia cu 3, aducem numărul complex din stânga la forma algebrică standard amplificând cu conjugatul numitorului

$$\frac{15+6i}{6-15i} = \frac{5+2i}{2-5i} = \frac{(5+2i)(2+5i)}{2^2-(5i)^2} = \frac{10+4i+25i+10i^2}{29} = \frac{29i}{29} = i$$

Din egalitatea $i = a + bi$ şi din faptul că $a, b \in \mathbb{R}$ rezultă $\boxed{a = 0, b = 1}$.

2. Subiectul II.1

Rezolvare.

(a) Deoarece $\hat{2}^3 = \hat{0}$ în $\mathbb{Z}_8$, rezultă $\hat{2}^{2007} = \hat{2}^{2004} \cdot \hat{2}^3 = \boxed{\hat{0}}$.

(b) Aplicând formula $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ şi ţinând cont că $0! = 1$, obţinem că expresia este egală cu $\dfrac{8!}{3!5!} - \dfrac{8!}{5!3!} + \dfrac{8!}{8!0!} = 0 + 1 = \boxed{1}$.

(c) Folosind faptul că $\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$ obţinem $x = 5^{-1} = \boxed{\dfrac{1}{5}}$.

(d) Deoarece $64 = 2^6$ şi $32 = 2^5$, ecuaţia este echivalentă cu

$$2^{6x} = 2^5 \Leftrightarrow 6x = 5 \Leftrightarrow \boxed{x = \tfrac{5}{6}}$$

(e) Verificăm, pentru fiecare dintre cele 5 valori posibile ale lui n, dacă relaţia este adevărată : $3^1 = 3 < 19$, $3^2 = 9 < 19$, $3^3 = 27 > 19$, $3^4 = 81 > 19$, $3^5 = 243 > 19$. Cum 2 din cele 5 elemente ale mulţimii satisfac inegalitatea, probabilitatea este $\boxed{\dfrac{2}{5}}$.

3. Subiectul II.2

Rezolvare.

(a) Pentru orice x real, avem $f'(x) = \boxed{3x^2 + 5}$.

(b) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{5x^2}{2} - x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{5}{2} - 1 = \boxed{\frac{7}{4}}$

(c) Conform definiţiei derivatei într-un punct, limita cerută este $f'(0) = \boxed{5}$.

(d) Deoarece $f'(x) = 3x^2 + 5 > 0$ pentru orice x real, rezultă că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(e) Deoarece $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$, limita se scrie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n\left(2 + \frac{3}{\ln n}\right)}{\ln n\left(5 - \frac{2}{\ln n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{3}{\ln n}}{5 - \frac{2}{\ln n}} = \boxed{\tfrac{2}{5}}$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 9 + 2 - 6 - 6 - 1 = \boxed{0}$. Deoarece $\det(A) = 0$, rangul lui A este mai mic ca 3. Căutăm un minor de ordinul doi nenul. Găsim de exemplu $d = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$. Rangul lui A este deci $\boxed{2}$.

(b) Matricea $B(x)$ este

$$B(x)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}+x\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+x&1&1\\1&2+x&3\\3&2&1+x\end{pmatrix}$$

Obţinem astfel

$$\begin{aligned}f(x)&=\det(B(x))=\begin{vmatrix}1+x&1&1\\1&2+x&3\\3&2&1+x\end{vmatrix}\\&=(1+x)(2+x)(1+x)+9+2-3(2+x)-6(1+x)-(1+x)\\&=(x^2+2x+1)(x+2)+11-6-3x-6-6x-1-x\\&=x^3+2x^2+2x^2+4x+x+2-2-10x=x^3+4x^2-5x\end{aligned}$$

(c) Ecuaţia se scrie sub forma $f(x)=0\Leftrightarrow x^3+4x^2-5x=0\Leftrightarrow x(x^2+4x-5)=0$. Deducem $\boxed{x_1=0}$, iar din $x^2+4x-5=0$ avem $\boxed{x_2=1,x_3=-5}$.

(d) Folosind punctul (b), avem $\det(B(2))=f(2)=14\neq 0$, deci $B(2)$ este inversabilă.

(e) Impunând condiţia din ipoteză, obţinem

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+c&=&0\\a+2b+3c&=&0\\3a+2b+c&=&0\end{cases}$$

Din prima ecuaţie rezultă $a=-b-c$. Înlocuim în celelalte două:

$$\begin{cases}-b-c+2b+3c&=&0\\-3b-3c+2b+c&=&0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b+2c&=&0\\b+2c&=&0\end{cases}$$

Deci $b=-2c$. Alegem $c=1$. Rezultă $b=-2,a=1$. Obţinem

$$U=\boxed{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}}$$

(f) De exemplu $C=\boxed{\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&-2&-2\\1&1&1\end{pmatrix}}$.

(g) Presupunem că există matricea V din enunţ. Obţinem

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z&=&1\\x+2y+3z&=&0\\3x+2y+z&=&0\end{cases}$$

Din prima ecuaţie rezultă $x=1-y-z$. Înlocuim în celelalte două:

$$\begin{cases}1-y-z+2y+3z&=&0\\3-3y-3z+2y+z&=&0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y+2z&=&-1\\y+2z&=&3\end{cases}.$$

Contradicţie.

5. Subiectul IV

Rezolvare.

(a) $B(1,1) = \int_0^1 x(1-x)\,dx = \int_0^1 (x-x^2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{6}}$

(b) $B(0,n) = \int_0^1 x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

(c) $B(n,0) = \int_0^1 (1-x)^n\,dx = -\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}$

(d) În $B(p,q)$ efectuăm schimbarea de variabilă $x = 1-t$. Avem $dx = -dt$, iar pentru $x = 0 \Rightarrow t = 1$ şi pentru $x = 1 \Rightarrow t = 0$. Integrala devine $B(p,q) = \int_1^0 (1-t)^q t^p\,(-dt) = -\int_1^0 t^p(1-t)^q\,dt = \int_0^1 t^p(1-t)^q\,dt = B(q,p), \forall p,q \in \mathbb{N}$

(e) Pentru orice $p \in \mathbb{N}^*$ şi orice $q \in \mathbb{N}$, avem

$$\begin{aligned} B(p,q) &= \int_0^1 x^q(1-x)^p\,dx = \int_0^1 \left(\frac{x^{q+1}}{q+1}\right)'(1-x)^p\,dx \\ &= \frac{x^{q+1}}{q+1}(1-x)^p\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{q+1}}{q+1}\cdot p(1-x)^{p-1}(-1)\,dx \\ &= \frac{p}{q+1}\int_0^1 x^{q+1}(1-x)^{p-1}\,dx = \frac{p}{q+1}B(p-1,q+1) \end{aligned}$$

(f) Pentru $n = 0$ egalitatea este evidentă. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ şi $q \in \mathbb{N}$, aplicăm succesiv relaţia demonstrată la punctul precedent

$$\begin{aligned} B(n,q) &= \frac{n}{q+1}B(n-1,q+1) \\ B(n-1,q+1) &= \frac{n-1}{q+2}B(n-2,q+2) \\ B(n-2,q+2) &= \frac{n-2}{q+3}B(n-3,q+3) \\ \ldots &\;..\; \ldots \\ B(1,q+n-1) &= \frac{1}{q+n}B(0,q+n) \end{aligned}$$

Prin înmulţirea acestor relaţii şi în urma simplificărilor, obţinem $B(n,q) = \frac{n!}{(q+1)\ldots(q+n)}B(0,q+n) = \frac{n!q!}{(n+q)!}B(0,q+n)$.

(g) Din punctul precedent şi din (b), pentru orice $p,q \in \mathbb{N}$ avem

$$B(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q)!}\cdot\frac{1}{p+q+1} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$