BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 93

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 93

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Conform formulei fundamentale a trigonometriei,

$$\sin^2 \frac{3\pi}{4} + \cos^2 \frac{3\pi}{4} = \boxed{1}$$

(b) Coordonatele mijlocului segmentului AB sunt mediile aritmetice ale coordonatelor lui A şi B, adică

$$\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{3+(-1)}{2}\right) = \boxed{(1,1)}$$

(c) Partea reală a numărului complex

$$z = (1-3i)(3-i) = 3 - 9i - i + 3i^2 = 3 - 10i - 3 = -10i$$

este $\mathbf{Re}\, z = \boxed{0}$.

(d) Punctul A se află pe parabolă: $(2\sqrt{3})^2 = 6 \cdot 2$. Ecuaţia tangentei dedusă prin dedublare este $\boxed{2\sqrt{3}y = 3(x+2)}$.

(e) Coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC sunt mediile aritmetice ale coordonatelor vârfurilor, adică

$$\left(\frac{-1+2+3}{3}, \frac{3+2+(-1)}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

(f) Fie a lungimea laturii pătratului. Lungimea diagonalei este atunci $a\sqrt{2} = \sqrt{8}$, de unde $a = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{4} = \boxed{2}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a lui f satisface $(f \circ f^{-1})(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Cu alte cuvinte,

$$2f^{-1}(x) + 1 = x, \forall x \in \mathbb{R} \iff f^{-1}(x) = \boxed{\frac{x-1}{2}}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

(b) Folosind formula combinărilor, avem

$$C_6^3 - C_6^4 + C_6^6 = \frac{6!}{3!\cdot 3!} - \frac{6!}{4!\cdot 2!} + \frac{6!}{6!\cdot 0!} = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{5\cdot 6}{1\cdot 2} + 1 = 20 - 15 + 1 = \boxed{6}$$

(c) Deoarece inegalitatea din enunţ se poate scrie sub forma echivalentă $2 < \log_4 k < 3 \Leftrightarrow 16 = 4^2 < k < 4^3 = 64$, putem lua de exemplu $k = \boxed{25}$.

(d) Ecuaţia se scrie $\dfrac{x!}{(x-1)!} = 4 \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)!\cdot x}{(x-1)!} = 4 \Leftrightarrow x = \boxed{4} \in \mathbb{N}^*$.

(e) Deoarece $3^1 = 3 < 21$, $3^2 = 9 < 21$, $3^3 = 27 \geq 21$, $3^4 = 81 \geq 21$ şi $3^5 = 243 \geq 21$, notăm că 3 din cele 5 elemente ale mulţimii satisfac condiţia, deci probabilitatea este $\boxed{\dfrac{3}{5}}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f'(x) = \boxed{12x^2 + 2}$.

(b) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (4x^3 + 2x + 1)\,dx = (x^4 + x^2 + x)\Big|_0^1 = \boxed{3}$

(c) Conform definiţiei derivatei unei funcţii într-un punct, limita este $f'(0) = 12\cdot 0^2 + 2 = \boxed{2}$.

(d) Cum $f'(x) = 12x^2 + 2 \geq 2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(e) Dând factor comun forţat un n la numitor şi la numărător, obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-3n+3}{4n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(-3+\frac{3}{n})}{n(4-\frac{2}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{-3+\frac{3}{n}}{4-\frac{2}{n}} = \frac{-3+0}{4-0} = \boxed{-\frac{3}{4}}.$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) $\det X = 1\cdot 2 - 0\cdot 0 = \boxed{2}$

(b) Deoarece $\det X = 2 \neq 0$, rangul matricei X este maxim, adică $\boxed{2}$.

(c) Deoarece $\det U = 1\cdot 1 - 0\cdot(-1) = 1 \neq 0$, matricea U este inversabilă şi

$$U^{-1} = \frac{1}{\det U}\cdot U^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) $UAU^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$

(e) Calculăm

$$XY - YX = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a\\ b & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & a\\ b & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & a\\ 2b & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 2a\\ b & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -a\\ b & 0\end{pmatrix}.$$

Conform punctului (d), egalitatea $XY - YX = UAU^{-1}$ revine la $\boxed{a = -3,\ b = 1}$.

(f) Fie $B, Z, W \in M_2(\mathbb{R})$, B inversabilă. Folosind asociativitatea înmulţirii matricelor şi faptul că $BB^{-1} = I_2$, iar $ZI_2 = Z$, avem

$$(B^{-1}ZB)(B^{-1}WB) = B^{-1}Z(BB^{-1})WB = B^{-1}ZI_2WB = B^{-1}ZWB.$$

(g) Înmulţind egalitatea de la punctul (e) cu U^{-1} la stânga şi cu U la dreapta şi apoi folosind punctul (f), obţinem

$$\begin{aligned} A &= U^{-1}(UAU^{-1})U = U^{-1}(XY - YX)U = \\ &= (U^{-1}XU)(U^{-1}YU) - (U^{-1}YU)(U^{-1}XU) \end{aligned}$$

Luăm $P = \boxed{U^{-1}XU}$ şi $Q = \boxed{U^{-1}YU}$.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f'(x) = \boxed{\dfrac{2x}{x^2 + e}}$.

(b) După aducere la acelaşi numitor, inegalitatea poate fi scrisă sub forma echivalentă $\dfrac{(x-1)(\ln(e+1) - x)}{x\ln(e+1)} \geq 0$. Deoarec pentru $x \in [1, \ln(e+1)]$, toţi factorii, atât de la numitor cât şi de la numărător sunt pozitivi, inegalitatea este evidentă.

(c) Fie $x \in [1, \ln(e+1)]$. Efectuând înmulţirile, inegalitatea de la punctul precedent devine $1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{\ln(e+1)} + \dfrac{1}{\ln(e+1)} \geq 0$, ceea ce este echivalent cu

$$\frac{1 + \ln(e+1)}{\ln(e+1)} \geq \frac{1}{x} + \frac{x}{\ln(e+1)}.$$

(d) Pentru $x \in [0, 1]$ avem $f(x) \in [1, \ln(1+e)]$. Aplicând punctul precedent pentru $f(x) \in [1, \ln(1+e)]$ în locul lui x, obţinem exact inegalitatea din enunţ.

(e) Pentru $u, v \in \mathbb{R}$, avem $(u+v)^2 \geq 4uv \Leftrightarrow u^2 + 2uv + v^2 \geq 4uv \Leftrightarrow u^2 - 2uv + v^2 \geq 0 \Leftrightarrow (u-v)^2 \geq 0$. Evident.

(f) Integrând inegalitatea de la punctul (d) şi folosind monotonia integralei, avem

$$\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx + \frac{1}{\ln(e+1)}\int_0^1 f(x)\,dx \leq \int_0^1 \frac{1 + \ln(e+1)}{\ln(e+1)}\,dx = \frac{1 + \ln(e+1)}{\ln(e+1)}$$

(g) Fie $u = \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx,\ v = \frac{1}{\ln(e+1)}\int_0^1 f(x)\,dx$. Atunci inegalitatea de la punctul (f) se poate scrie $u + v \le \frac{1+\ln(e+1)}{\ln(e+1)} \Leftrightarrow (u+v)^2 \le \left(\frac{1+\ln(e+1)}{\ln(e+1)}\right)^2$. Folosind punctul (e), avem

$$\left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx\right)\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right) = (\ln(e+1))uv \le \frac{\ln(e+1)}{4}(u+v)^2 \le \frac{(1+\ln(e+1))^2}{4\ln(e+1)}$$

PRO DIDACTICA VĂ UREAZĂ SUCCES LA BAC.
DE LA TOAMNĂ VĂ AŞTEPTĂM CU ÎNTREBĂRI DIN MATERIA DE FACULTATE.