BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 92

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 92

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) **Prima rezolvare.** $|i^{2007}| = |i|^{2007} = (\sqrt{0^2+1^2})^{2007} = \boxed{1}$.
A doua rezolvare. Folosind faptul că $i^2 = -1$, avem $i^{2007} = i^{2006} \cdot i = (i^2)^{1003} \cdot i = (-1)^{1003} \cdot i = -i$. Atunci $|i^{2007}| = |-i| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = \boxed{1}$.

(b) Am văzut la a doua rezolvare a punctului precedent că $i^{2007} = -i$. Atunci partea reală este $\boxed{0}$.

(c) Numărul $\sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ este $\boxed{\text{pozitiv}}$.

(d) Aria triunghiului ABC este dată de

$$\frac{|AB| \cdot |BC| \cdot \sin B}{2} = \frac{6 \cdot 10 \cdot \sin 45^\circ}{2} = \frac{60 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \boxed{15\sqrt{2}}$$

(e) Ecuaţia cercului cu centrul în $(1, -1)$ şi raza 2 este

$$\boxed{(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2^2}$$

(f) Cu formula uzuală distanţa este $\frac{|3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - (-1)|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \boxed{\frac{6}{\sqrt{14}}}$

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Discriminantul ecuaţiei de gradul doi este $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$, iar rădăcinile $x_1 = \frac{-3+5}{2} = \boxed{1}$ şi $x_2 = \frac{-3-5}{2} = \boxed{-4}$.

(b) O mulţime cu n elemente are 2^n submulţimi. Pentru a avea $8 = 2^3$ submulţimi, o mulţime trebuie să aibă $\boxed{3}$ elemente.

(c) Faptul că numerele $2; x; x+4$ sunt în progresie aritmetică, revine la $x - 2 = (x+4) - x \Leftrightarrow x - 2 = 4$, de unde $x = \boxed{6}$.

(d) Conform primei relaţii a lui Viète, $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{-6}{2} = \boxed{3}$.

(e) Observând că $\hat{4}^2 = \hat{1}$ în $\mathbb{Z}_5$, avem $\hat{4}^{2007} = (\hat{4}^2)^{1003} \cdot \hat{4} = \hat{1}^{1003} \cdot \hat{4} = \hat{1} \cdot \hat{4} = \boxed{\hat{4}}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^3 = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^3 = (1-0)^3 = \boxed{1}$

(b) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $f'(x) = \boxed{3(x-2)^2}$.

(c) Conform definiţiei derivatei unei funcţii într-un punct, limita din enunţ este $f'(1) = 3 \cdot (1-2)^2 = \boxed{3}$.

(d) Derivata a doua a lui f este $f''(x) = 6(x-2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Singurul punct în care f'' se anulează este $x = 2$. Cum pentru $x < 2$ avem $f''(x) < 0$, iar pentru $x > 2$ avem $f''(x) > 0$, rezultă că punctul $x = \boxed{2}$ este punct de inflexiune pentru f.

(e)

$$\begin{aligned} \int_1^2 f^3(x)\,dx &= \int_1^2 (x-2)^9\,dx = \left.\frac{(x-2)^{10}}{10}\right|_1^2 \\ &= \frac{(2-2)^{10}}{10} - \frac{(1-2)^{10}}{10} = \boxed{-\frac{1}{10}} \end{aligned}$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 = \boxed{1}$

(b) Prin calcul direct $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

(c) Cum $\det A \neq 0$, rangul lui A este maxim, adică $\boxed{2}$.

(d) Cum $\det A \neq 0$, matricea A este inversabilă. Avem

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

(e) Fie $U, V \in C(A)$, adică $UA = AU$ şi $VA = AV$. Folosind asociativitatea înmulţirii matricelor, avem $(UV)A = U(VA) = U(AV) = (UA)V = (AU)V = A(UV)$. Deci $UV \in C(A)$.

(f) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in C(A)$. Din relaţia $XA = AX$ obţinem

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow c = 0, d = a$$

Deci $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

(g) Din $Y^{2007} = O_2$ rezultă $(\det A)^{2007} = \det(Y^{2007}) = 0$, adică $\det(Y) = 0$. Deoarece $Y \in C(A)$, conform punctului anterior, există $a, b \in \mathbb{C}$ astfel ca $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Dar atunci $\det Y = a^2$, deci se impune $a = 0$. In acest caz $Y = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi prin calcul direct de vede că $Y^2 = O_2$.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) $F(x) = 1 + \int_0^x f(t)\,dt = 1 + (t + t^2 + \ldots + t^6)\Big|_0^x = 1 + x + x^2 + \ldots + x^6$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Nu avem nimic de făcut. Aceasta este o consecinţă directă a teoremei Leibniz-Newton care spune că funcţia $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ este o primitivă a funcţiei f.

(c) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem

$$\begin{aligned}(x-1)F(x) &= (x-1)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)\\ &= x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x\\ &\quad -x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1\\ &= x^7 - 1\end{aligned}$$

(d) Pentru $x = 1$ avem evident $F(1) = 1 + 1 + 1^2 + 1^3 + \ldots + 1^6 = 7 > 0$. Pentru $x \neq 1$, avem conform (c), $F(x) = \dfrac{x^7 - 1}{x - 1}$. Pentru $x < 1$, atât numărătorul cât şi numitorul sunt numere negative, deci $F(x) > 0$, iar pentru $x > 1$, atât numărătorul cât şi numitorul sunt numere pozitive, deci $F(x) > 0$.

(e) **Prima rezolvare.** Presupunem că nu există $a \neq b$ astfel ca $F(a) = F(b)$. Aceasta înseamnă exact faptul că F este injectivă. Dar o funcţie continuă şi injectivă este strict monotonă. În cazul lui F avem însă $\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = \infty$. Contradicţie.

A doua rezolvare. Rearanjăm $F(x)$ sub forma

$$F(x) = 1 + x(x+1) + x^3(x+1) + x^5(x+1) = 1 + x(x+1)(1 + x^2 + x^4)\,.$$

De aici observăm că $F(0) = F(-1) = 1$. Luăm $\boxed{a = 0}$ şi $\boxed{b = -1}$.

(f) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{nf(n)}{F(n)} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{6n^6 + 5n^5 + 4n^4 + 3n^3 + 2n^2 + n}{n^6 + n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1} = \boxed{6}$

(g) Ecuaţia $f(x^2) = 1$ se scrie echivalent $1 + 2x^2 + 3x^4 + 4x^6 + 5x^8 + 6x^{10} = 1$, sau $x^2(2 + 3x^2 + 4x^4 + 5x^6 + 6x^8) = 0$. Cum suma dintre paranteze este strict pozitivă, rezultă că singura soluţie este $x = \boxed{0}$.

Pro Didactica vă urează succes la BAC.
De la toamnă vă aşteptăm cu întrebări din materia de facultate.