BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 91

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 91

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Cu formula uzuală, distanţa este $\dfrac{|1\cdot(-3)+1\cdot 2-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \boxed{\sqrt{2}}$.

(b) Coordonatele lui C trebuie să satisfacă ecuaţia dreptei. Deci $a+3-1=0$, iar de aici $a = \boxed{-2}$.

(c) $d(A,B) = \sqrt{(2-(-3))^2+(-1-2)^2} = \boxed{\sqrt{34}}$

(d) Coordonatele mijlocului lui AB sunt mediile aritmetice ale coordonatelor punctelor A şi B, adică $\left(\dfrac{-3+2}{2}, \dfrac{2+(-1)}{2}\right) = \boxed{\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)}$.

(e) Aria triunghiului este dată de $\frac{\Delta}{2}$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 6 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = -5+18 = 13$. Deci aria este $\boxed{\dfrac{13}{2}}$.

(f) Raza acestui cerc este distanţa de la A la d, adică $\sqrt{2}$, conform (a). Atunci ecuaţia cercului este $\boxed{(x+3)^2+(y-2)^2 = 2}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Considerăm funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^3+x$. Deoarece $f'(x) = 3x^2+1 > 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, rezultă că funcţia este strict crescătoare, deci în particular injectivă. Astfel ecuaţia $f(x)=10$ va avea o soluţie unică pe care trebuie să o "ghicim". Prin încercări, vedem că $f(2)=10$, deci ecuaţia are rădăcina unică $x = \boxed{2}$.

(b) $\log_3(27\sqrt{3}) = \log_3(3^3\cdot 3^{1/2}) = \log_3(3^{7/2}) = 7/2 \in \mathbb{Q}$.

(c) Grupăm convenabil termenii sumei şi avem $\hat{0}+(\hat{1}+\hat{6})+(\hat{2}+\hat{5})+(\hat{3}+\hat{4}) = \hat{0}+\hat{0}+\hat{0}+\hat{0} = \boxed{\hat{0}}$.

(d) Fie a_1 primul termen al progresiei, iar r raţia. Atunci

$$\begin{aligned} a_{10} = a_1 + 9r &= 21 \\ a_{100} = a_1 + 99r &= 201 \end{aligned}$$

Scăzând din a doua ecuaţie pe prima, avem $90r = 180$, deci $r = 2$. Substituind în prima ecuaţie, deducem $a_1 = 21 - 92 = 21 - 18 = \boxed{3}$.

(e) Expresia din enunţ reprezintă suma primilor k termeni ai unei progresii aritmetice de raţie 2 şi prim termen $a_1 = 1$. Deci $n = a_k = 2k - 1$. Atunci suma este $\dfrac{a_1 + a_k}{2} \cdot k = \dfrac{1 + 2k - 1}{2} \cdot k = k^2$ şi din $k^2 = 121$, obţinem $k = 11$. Aşadar $n = 2k - 1 = 2 \cdot 11 - 1 = \boxed{21}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) $f(x) - \dfrac{1}{2x-1} + \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{3-x}{(2x-1)(x+2)} - \dfrac{x+2}{(2x-1)(x+2)} + \dfrac{2x-1}{(2x-1)(x+2)} = \boxed{0}$

(b) Folosind punctul precedent avem $f(x) = \dfrac{1}{2x-1} - \dfrac{1}{x+2}$. Atunci pe intervalul $(\frac{1}{2}, \infty)$, avem

$$\int f(x)\,dx = \int \left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{x+2}\right) dx = \boxed{\frac{1}{2}\ln(2x-1) - \ln(x+2) + C}.$$

(c) Cum pe $\mathbb{R} \setminus \{-2, \frac{1}{2}\}$ funcţia este continuă, singurele posibilităţi sunt $x = -2$ şi $x = \frac{1}{2}$. Avem într-adevăr

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -2_+} f(x) &= \infty \\ \lim_{x \to \frac{1}{2}_+} f(x) &= \infty \end{aligned}$$

deci $\boxed{x = -2}$ şi $\boxed{x = \frac{1}{2}}$ sunt asimptote verticale.

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} n f(n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n - n^2}{(2n-1)(n+2)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{3}{n} - 1}{(2 - \frac{1}{n})(1 + \frac{2}{n})} = \boxed{-\dfrac{1}{2}}$

(e) Conform teoremei Leibniz-Newton şi folosind punctul (b), avem

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x)\,dx &= \left(\frac{1}{2}\ln(2x-1) - \ln(x+2)\right)\Big|_1^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\ln 3 - \ln 4\right) - \left(\frac{1}{2}\ln 1 - \ln 3\right) = \boxed{\ln\frac{3\sqrt{3}}{4}} \end{aligned}$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) $\det A = 0 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = \boxed{-2}$.

(b) Cum $\det A \neq 0$, rangul să este maxim, adică $\boxed{2}$.

(c) Deoarece $A \cdot \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$, obţinem $a = \boxed{\dfrac{1}{2}}$ şi $b = \boxed{1}$.

(d) Fie $U, V \in C(A)$. Atunci

$$(UV)A = U(VA) = U(AV) = (UA)V = (AU)V = A(UV),$$

deci $UV \in C(A)$.

(e) Fie $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Atunci $AX = \begin{pmatrix} z & t \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$ şi $XA = \begin{pmatrix} 2y & x \\ 2t & z \end{pmatrix}$. Condiţia $AX = XA$ revine la

$$\begin{cases} z & = & 2y \\ t & = & x \\ 2x & = & 2t \\ 2y & = & z \end{cases}$$

Notând $a = x = t$ şi $b = y$, avem $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$.

(f) Fie $Y \in C(A)$. Conform punctului precedent, există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel ca $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$. Condiţia $Y^2 = O_2$ se traduce prin $\begin{pmatrix} a^2 + 2b^2 & 2ab \\ 4ab & a^2 + 2b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Din $a^2 + 2b^2 = 0$, rezultă $a = b = 0$, deci $Y = O_2$.

(g) Fie $Z \in C(A)$ astfel ca $Z^{2007} = O_2$. Conform punctului (d), orice putere a lui Z este în $C(A)$. Putem folosi atunci repetat punctul precedent în implicaţiile următoare:
$Z^{2007} = O_2 \Rightarrow Z^{2048} = O_2 \Rightarrow Z^{1024} = O_2 \Rightarrow Z^{512} = O_2 \Rightarrow Z^{256} = O_2 \Rightarrow Z^{128} = O_2 \Rightarrow Z^{64} = O_2 \Rightarrow Z^{32} = O_2 \Rightarrow Z^{16} = O_2 \Rightarrow Z^{8} = O_2 \Rightarrow Z^{4} = O_2 \Rightarrow Z^{2} = O_2 \Rightarrow Z = O_2$

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Deoarece funcţia $\cos$ este periodică de perioadă 2π, rezultă $f(x + 2\pi) = \arccos(\cos(x + 2\pi)) = \arccos(\cos x) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Conform punctului precedent, suma din enunţ este

$$\sum_{k=0}^{1003} [f(2k\pi) + f((2k+1)\pi)] = \sum_{k=0}^{1003} [f(0) + f(\pi)]$$

Dar $f(0) = \arccos(\cos 0) = \arccos(1) = 0$ şi $\arccos(\cos \pi) = \arccos(-1) = \pi$.

Deci suma este $\sum_{k=0}^{1003} [0 + \pi] = \boxed{1004\pi}$

(c) Reamintindu-ne că $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ este inversa funcţiei $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$, avem $f(x) = \arccos(\cos x) = x, \ \forall x \in [0, \pi]$. Cum $\frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$, avem $f'(x) = 1$, pentru orice $x \in (0, \pi)$, deci în particular $f'(\frac{\pi}{2}) = \boxed{1}$.

(d) Am văzut la rezolvarea punctului precedent că $f(x) = x$, $\forall x \in [0, \pi]$. Atunci pentru $x \in [0, \pi 0]$ avem $[0, x] \subset [0, \pi]$, deci

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt = \int_0^x t, dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^x = \frac{x^2}{2}.$$

Comentariu: Egalitatea este valabilă pentru $x \in [0, \pi]$.

(e) Funcţia $\mathbb{R} \ni x \mapsto \arccos x \in \mathbb{R}$ are imaginea $[0, \pi]$, în consecinţă $f(x) = \arccos(\cos x) \in [0, \pi]$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(f) Fie G o primitivă lui f. Atunci conform punctului precedent $G'(x) = f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. De fapt $G'(x) > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ cu excepţia acelor x pentru care $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Cum G este continuă rezultă că G este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(g) Vom folosi faptul că pentru $y \in [-1, 1]$ avem

$$\arccos(-y) = \pi - \arccos y \qquad (*)$$

Intr-adevăr, ambii membrii ai egalităţii sunt în intervalul $[0, \pi]$, interval pe care funcţia $\cos$ este injectivă. Deci egalitatea este echivalentă cu $\cos(\arccos(-y)) = \cos(\pi - \arccos y)$. Or ultima egalitatea revine la $-y = \cos\pi\cos(\arccos y) - \sin\pi\sin(\arccos y)$ şi este consecinţă imediată a faptului că $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$ şi $\cos(\arccos y) = y$.

Revenim la problema propriu zisă. Avem

$$F(2\pi) = \int_0^{2\pi} f(t)\, dt = \int_0^{\pi} f(t)\, dt + \int_{\pi}^{2\pi} f(t)\, dt$$

Conform punctului (d), prima integrală este $\frac{\pi^2}{2}$.

Evaluăm a doua integrală cu schimbarea de variabilă $t = x + \pi$. Folosind şi identitatea (*) demonstrată mai sus, avem

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{2\pi} f(t)\, dt &= \int_0^{\pi} \arccos(\cos(x+\pi))\, dx = \int_0^{\pi} \arccos(-\cos x)\, dx \\ &= \int_0^{\pi} (\pi - \arccos(\cos x))\, dx = \int_0^{\pi} (\pi - x)\, dx \\ &= \left.\left(\pi x - \frac{x^2}{2}\right)\right|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}\end{aligned}$$

In concluzie $F(2\pi) = \boxed{\pi^2}$.

Pro Didactica vă urează succes la BAC.
De la toamnă vă aşteptăm cu întrebări din materia de facultate.