BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 90

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 90.

1. Subiectul I

Rezolvare.

(a) $a + bi = (1+2i)(2+i) = 2-2+4i+i = 5i$, de unde $\boxed{a = 0,\ b = 5}$.

(b) Deoarece $-x+y-3=0 \Leftrightarrow y = 1\cdot x+3$ panta acestei drepte este $\boxed{m=1}$.

(c)
$$i\cdot i^2\cdot\ldots\cdot i^{10} = i^{1+2+\ldots+10} = i^{55} = i\cdot(i^2)^{27} = i\cdot(-1)^{27} = \boxed{-i}.$$

(d) Punem condiţia ca coordonatele punctului $A(2,a)$ să satisfacă ecuaţia dreptei. Obţinem $2-a\cdot a+2=0 \Leftrightarrow a^2=4 \Leftrightarrow \boxed{a\in\{-2,2\}}$.

(e) Notăm cu p perimetrul triunghiului. Calculăm lungimile laturilor sale:
$$\left.\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(1-2)^2+(1-1)^2} = 1\\ |BC| &= \sqrt{(1-1)^2+(2-1)^2} = 1\\ |CA| &= \sqrt{(2-1)^2+(1-2)^2} = \sqrt{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{p = 2+\sqrt{2}}.$$

(f) Avem
$$\sin 75^\circ = \sin 30^\circ\cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}.$$

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) În $\mathbb{Z}_8$ avem $\hat{5}\cdot\hat{5} = \widehat{25} = \hat{1}$, deci $\hat{5}^{-1} = \hat{5}$. Atunci
$$\hat{5}\cdot\hat{x} = \hat{7} \Leftrightarrow \hat{x} = \hat{5}\cdot\hat{7} = \widehat{35} = \boxed{\hat{3}}.$$

(b) În general, suma rădăcinilor ecuaţiei $x^2-px+q=0$ este egală cu p. În cazul ecuaţiei $x^2-(m+3)x-m+1=0$ suma celor două rădăcini este $m+3$. Condiţia din enunţ revine la $m+3=5$, sau $\boxed{m=2}$.

(c) Într-adevăr, $\log_2 10 - \log_2 5 = \log_2\frac{10}{5} = \log_2 2 = 1\in\mathbb{Z}$.

(d) Avem
$$8^x-2=0 \Leftrightarrow 2^{3x}-2=0 \Leftrightarrow 2^{3x}=2^1 \Leftrightarrow 3x=1 \Leftrightarrow \boxed{x=\frac{1}{3}}.$$

(e) Din tabelul

n	2	3	4	5
C_n^2	1	3	6	10

constatăm că inegalitatea $C_n^2 < 5$ este satisfăcută de două numere din patru, anume $n \in \{2,3\}$. Probabilitatea acestui eveniment este $\boxed{p = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) $\boxed{f'(x) = 6x^2 + 4}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Avem

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (2x^3 + 4x - 1)\,dx = \left(\frac{x^4}{2} + 2x^2 - x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} + 2 - 1 = \boxed{\frac{3}{2}}.$$

(c) Limita din enunţ este exact derivata funcţiei f în $x = 0$, adică $\boxed{f'(0) = 4}$.

(d) Cu formula de la (a) devine clar că $f'(x) \geq 4 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Prin urmare f este o funcţie strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(e) Dând factor forţat pe n^2 atât la numărător cât şi la numitor obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 2n}{2n^2 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{2}{n}}{2 + \frac{1}{n^2}} = \frac{1-0}{2+0} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Coeficienţii matricilor E şi I_2 constau din numerele $\{0,1,2\}$, toate naturale. Deci $E, I_2 \in M$.

(b) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ două matrici din M. Atunci

$$A + B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} \in M.$$

(c) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ două matrici din M. Atunci

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix} \in M.$$

(d) Matricea $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M$ este evident de rang 1.

(e) Matricea $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2007 \end{pmatrix} \in M$ are determinantul egal cu 2007.

(f) Deoarece $\det E = 1$ rezultă $E^{-1} = E^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \notin M$, deoarece unul dintre coeficienţi este negativ.

(g) Fie $E = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M$ astfel încât $E^{-1} \in M$. Determinantul oricărei matrici din M este număr întreg. Pe de altă parte, avem

$$\underbrace{\det E}_{\in \mathbb{Z}} \cdot \underbrace{\det E^{-1}}_{\in \mathbb{Z}} = \det I_2 = 1 \,.$$

Prin urmare $\det E \in \{-1, 1\}$. Continuăm mai departe rezolvarea pe cazuri.

- cazul $\det E = 1$. Atunci $E^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in M$ implică $b = c = 0$ (deoarece $b, c \in \mathbb{N}$ avem $-b \le 0$ şi $-c \le 0$, dar din ipoteză matricea E^{-1} are coeficienţi naturali). Atunci $1 = \det E = ad$ implică $a = d = 1$. Aşadar $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.
- cazul $\det E = -1$. Atunci $E^{-1} = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in M$ implică exact ca în cazul precedent $d = a = 0$ şi $b = c = 1$

Prin urmare

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) $\boxed{f'(x) = 2xe^{x^2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Evident,

$$(x-1)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e}\right) = \frac{(x-1)(e-x)}{xe} \ge 0, \quad \forall x \in [1, e] \,.$$

(c) Dezvoltând mai departe inegalitatea de la punctul precedent, avem

$$(x-1)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e}\right) \ge 0 \;\Leftrightarrow\; 1 - \frac{x}{e} - \frac{1}{x} + \frac{1}{e} \ge 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{x} + \frac{x}{e} \le 1 + \frac{1}{e}, \quad \forall x \in [1, e] \,.$$

(d) Fie $x \in [0, 1]$. Atunci $x^2 \in [0, 1]$ şi $f(x) = e^{x^2} \in [e^0, e^1] = [1, e]$. Substituind pe x cu $f(x)$ în inegalitatea de la punctul precedent obţinem tocmai

$$\frac{1}{f(x)} + \frac{f(x)}{e} \le \frac{e+1}{e} \,.$$

(e) Fie $u, v \in \mathbb{R}$. Avem inegalităţile echivalente:

$$(u+v)^2 \geq 4uv \iff u^2 + 2uv + v^2 \geq 4uv \iff u^2 - 2uv + v^2 \geq 0 \iff (u-v)^2 \geq 0\,.$$

Ultima inegalitate este evident adevărată, de unde rezultă şi validitatea celei din enunţ.

(f) Integrând pe intervalul $[0,1]$ inegalitatea de la punctul (d) rezultă

$$\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx + \frac{1}{e}\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{f(x)} + \frac{f(x)}{e}\right) dx \leq \int_0^1 \frac{e+1}{e}\,dx = \frac{e+1}{e},$$

q.e.d.

(g) Introducem notaţiile

$$u = \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx, \quad w = \int_0^1 f(x)\,dx, \quad v = \frac{1}{e}\cdot w\,.$$

Evident $u, v, w \geq 0$. Combinând inegalitatăţile de la (e) şi (f) obţinem

$$4uv \leq (u+v)^2 \leq \left(\frac{e+1}{e}\right)^2,$$

de unde, prin înmulţire cu $\frac{e}{4}$ obţinem

$$uw = 4uv \cdot \frac{e}{4} \leq \frac{(e+1)^2}{4e},$$

adică tocmai ceea ce trebuia demonstrat.