BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 8

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 8

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Cu formula uzuală, distanţa este $\sqrt{(-1-5)^2+(-3-5)^2} = \boxed{10}$.

(b) Fie $D(a,b)$ simetricul lui A faţă de B. Atunci B este mijlocul segmentului AD, deci coordonatele lui B sunt mediile aritmetice ale coordonatelor lui A şi D. Avem $\left(\frac{-1+a}{2}, \frac{-5+b}{2}\right) = (5,3)$, de unde $a = 11$ şi $b = 11$. Simetricul căutat este deci $D\boxed{(11,11)}$.

(c) Coordonatele centrului de greutate al triunghiului sunt mediile aritmetice ale coordonatelor vârfurilor, adică

$$\left(\frac{-1+5+5}{3}, \frac{-5+3-5}{3}\right) = \boxed{\left(3, -\frac{7}{3}\right)}$$

(d) Lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$ este aceaşi cu lungimea segmentului AC şi este $\sqrt{(-1-5)^2+(-5-(-5))^2} = \boxed{6}$.

(e) Aria triunghiului ABC este $\frac{|\Delta|}{2}$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 6 & 8 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -48$. Deci aria este $\boxed{24}$.

(f) Folosind faptul că $i^2 = -1$ şi $i^4 = 1$, avem $i^{101} + i^{102} = (i^4)^{25} \cdot i + (i^4)^{25} \cdot i^2 = i - 1$. Deci partea reală este $\boxed{-1}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) In general, pentru $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, o mulţime de n elemente are C_n^k submulţimi de k elemente. In cazul de faţă, avem $\boxed{C_3^2 = 3}$ submulţimi.

(b) $\log_4(3+x) = 2 \Leftrightarrow 3 + x = 4^2 \Leftrightarrow x = \boxed{13}$. Trebuie notat că soluţia satisface condiţia de existenţă a logaritmului.

(c) Dezvolarea binomială are $6 + 1 = 7$ termeni. Termenii raţionali sunt cei în care $\sqrt{5}$ apare la o putere pară. Cum între 0 şi 6 sunt exact 4 numere pare (adică $0, 2, 4, 6$), dezvoltarea are $\boxed{4}$ termeni raţionali.

(d) Folosind prima din relaţiile lui Viète, suma rădăcinilor polinomului

$$f = 1 \cdot X^3 + 0 \cdot X^2 - 2X + 1$$

este $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{0}{1} = \boxed{0}$.

(e) Ecuaţia $1 \cdot x^2 + ax + 1 = 0$ are produsul rădăcinilor egal cu $\frac{1}{1} = 1$, pentru orice valoare din $\mathbb{Z}$ a parametrului a. In particular puteţi da ca răspuns $\boxed{x^2 + 1 = 0}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x > -\frac{2006}{2007}$ avem

$$f'(x) = \frac{(2007x + 2006)'}{2007x + 2006} = \boxed{\frac{2007}{2007x + 2006}}$$

(b) Cu definiţiei derivatei într-un punct, limita este $\boxed{f'(0) = \frac{2007}{2006}}$.

(c) Deoarece $f''(x) = -\frac{2007^2}{(2007x + 2006)^2} < 0$, pentru orice $x > -\frac{2007}{2007}$, rezultă că f este concavă pe $\left(-\frac{2006}{2007}, \infty\right)$. Deci numărul punctelor de inflexiune ale lui f este $\boxed{0}$.

(d) Având o nedeterminare de tipul $\frac{\infty}{\infty}$, folosim regula lui l'Hopital şi avem

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{2007x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{2007} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2007x + 2006} = \boxed{0}.$$

(e) Cum $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [0, 1]$, aria din enunţ este dată de

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 x' \ln(2007x + 2006)\,dx \\
&= x \ln(2007x + 2006)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2007x}{2007x + 2006}\,dx \\
&= \ln 4013 - \int_0^1 \left(1 - \frac{2006}{2007x + 2006}\right) dx \\
&= \ln 4013 - 1 + \frac{2006}{2007} \ln(2007x + 2006)\Big|_0^1 \\
&= \boxed{\ln 4013 - 1 + \frac{2006}{2007} \ln \frac{4013}{2006}}
\end{aligned}$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Se observă uşor că $I_2 = A(1) \in H$.

(b) Nu are sens să facem de două ori acelaşi calcul şi vom folosi punctul (e). Avem atunci $A(3) \cdot A(\frac{1}{3}) = A(1) = I_2$ şi $A(\frac{1}{3}) \cdot A(3) = A(1) = I_2$, deci inversa matricei $A(3)$ este $\boxed{A(\frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} 5/3 & -2/3 \\ 4/3 & -1/3 \end{pmatrix}}$.

(c) Pentru $x \in \mathbb{R}^*$ avem

$\det A(x) = (2-x)(2x-1) - (2-2x)(x-1) = -2x^2 + 5x - 2 + 2x^2 - 4x + 2 = \boxed{x}$.

(d) Folosind iar punctul (e), pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$, avem

$$A(x) \cdot A(x) = \boxed{A(x^2) = \begin{pmatrix} 2-x^2 & x^2-1 \\ 2-2x^2 & 2x^2-1 \end{pmatrix}}$$

(e) Fie $x, y \in \mathbb{R}^*$. Atunci

$$\begin{aligned} A(x) \cdot A(y) &= \begin{pmatrix} 2-x & x-1 \\ 2-2x & 2x-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-y & y-1 \\ 2-2y & 2y-1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (2-x)(2-y)+(x-1)(2-2y) & (2-x)(y-1)+(x-1)(2y-1) \\ (2-2x)(2-y)+(2x-1)(2-2y) & (2-2x)(y-1)+(2x-1)(2y-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2-xy & xy-1 \\ 2-2xy & 2xy-1 \end{pmatrix} = A(xy)\,. \end{aligned}$$

(f) Fie $x \in \mathbb{R}^*$ fixat. Notăm cu $P(n)$ propoziţia

$$A^n(x) = A(x^n)$$

Demonstrăm prin inducţie matematică (din păcate nu doar pentru a-i face un hatâr propunătorului; nu este nevoie de inducţie pentru aşa banalitate, dar baremul e barem) că $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
Verificarea. Pentru $n = 1$ avem evident $A(x) = A(x)$, deci $P(1)$ este verificată.
Pasul de inducţie. Presupunem $P(n)$ adevărată. Folosind ipoteza de inducţie şi punctul (e) avem $A^{n+1}(x) = A^n(x) \cdot A(x) = A(x^n) \cdot A(x) = A(x^{n+1})$. Conform principiului inducţiei, $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

(g) Folosind punctul (a), şi punctul precedent, avem $A^{2007}(x) = I_2 \Leftrightarrow A(x^{2007}) = A(1)$. Două matrice sunt egale când au toate elementele corepunzătoare egale, ceea ce în cazul de faţă revine la $x^{2007} = 1 \Leftrightarrow x = \boxed{1}$. Am folosit faptul că pentru $k \in \mathbb{N}$, $x = 1$ este singura rădăcină reală a ecuaţiei $x^{2k+1} = 1$.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{2007\}$, avem

$$f(x) - x + \frac{1}{x-2007} = \frac{x^2-2007x-1}{x-2007} - \frac{x^2-2007x}{x-2007} + \frac{1}{x-2007} = \boxed{0}.$$

(b) De la punctul (a) rezultă

$$f(x) = x - \frac{1}{x-2007}, \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2007\}$$

De aici $f'(x) = \boxed{1 + \frac{1}{(x-2007)^2}}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{2007\}$.

(c) Pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{2007\}$, de la punctul precedent rezultă că $f'(x) \geq 1 > 0$, deci în particular f este strict crescătoare pe $(-\infty, 2007)$.

(d) Continuând calculele de la punctul (b), pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{2007\}$, avem $f''(x) = -\frac{2}{(x-2007)^3}$. Atunci $f''(x) > 0$ pentru $x < 2007$, deci f este convexă pe $(-\infty, 2007)$. De asemenea $f''(x) < 0$ pentru $x > 2007$, deci f este concavă pe $(2007, \infty)$.

(e) Deoarece $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, graficul lui f nu are nici o asimptotă orizontală spre ∞. Căutăm o asimptotă oblică. Aceasta este în mod necesar de forma $y = mx + n$ cu

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{1}{x(x-2007)}\right) = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left[x - \frac{1}{x-2007} - x\right] = 0$$

Deci graficul funcţiei f are spre ∞ asimptota oblică $\boxed{y = x}$.

(f)

$$\int_{2008}^{2009} f(x)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \ln|x-2007|\right)\Big|_{2008}^{2009}$$

$$= \frac{2009^2 - 2008^2}{2} - (\ln 2 - \ln 1) = \boxed{\frac{4017}{2} - \ln 2}$$

(g) Folosim formula

$$1 + 2 + 3 + \ldots n = \frac{n(n+1)}{2}$$

şi avem $\lim_{n\to\infty} (1+2+3+\ldots+n)[f'(n) - 1] = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{1}{(n-2007)^2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

PRO DIDACTICA VĂ UREAZĂ SUCCES LA BAC.
DE LA TOAMNĂ VĂ AŞTEPTĂM CU ÎNTREBĂRI DIN MATERIA DE FACULTATE.