BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 88

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 88

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Folosind faptul că modulul raportului este egal cu raportul modulelor, obţinem $\left|\frac{4-3i}{3-4i}\right| = \frac{|4-3i|}{|3-4i|} = \frac{\sqrt{16+9}}{\sqrt{9+16}} = \boxed{1}$.

(b) Lungimea segmentului $[AC]$ este

$$AC = \sqrt{(3-4)^2+(6-7)^2} = \sqrt{1+1} = \boxed{\sqrt{2}}$$

(c) Tinând cont că $i^2 = -1$, numărul complex P se scrie

$$P = i^{1+3+5+7+9+11} = i^{36} = (i^2)^{18} = (-1)^{18} = 1$$

deci partea sa reală este $\boxed{1}$.

(d) Coordonatele punctelor A şi C verifică ecuaţia dreptei. Avem atunci

$$\begin{cases} 3+6a+b &= 0 \\ 4+7a+b &= 0 \end{cases}$$

Scăzând prima ecuaţie din a doua, obţinem $1+a=0 \Rightarrow a=-1$. Înlocuind acum a în prima ecuaţie, avem $3-6+b=0 \Rightarrow b=3$. Deci $\boxed{a=-1,\ b=3}$.

(e) Aria triunghiului ABC se calculează cu formula $S = \frac{|\Delta|}{2}$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 3+24+7-4-21-6 = 3$. Deci $\boxed{S = \frac{3}{2}}$.

(f) Aducem numărul complex din stânga la forma algebrică standard amplificând cu conjugatul numitorului

$$\frac{5+2i}{2-5i} = \frac{(5+2i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)} = \frac{10+25i+4i-10}{4+25} = i$$

Din $i = a+bi$ şi din faptul că $a, b \in \mathbb{R}$ rezultă $\boxed{a=0, b=1}$.

2. Subiectul II.1

Rezolvare.

(a) Deoarece $\hat{3}^2 = \hat{1}$, rezultă $\hat{3}^{2007} = \hat{3}^{2006} \cdot \hat{3} = (\hat{3}^2)^{1003} \cdot \hat{3} = \hat{1} \cdot \hat{3} = \boxed{\hat{3}}$.

(b) Aplicând formula $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ şi ţinând cont că $0! = 1$, obţinem că expresia este egală cu $\dfrac{9!}{3!6!} - \dfrac{9!}{6!3!} + \dfrac{8!}{8!0!} = 0 + 1 = \boxed{1}$.

(c) Folosind faptul că $\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$ obţinem $x = 5^{-1} = \boxed{\dfrac{1}{5}}$.

(d) Deoarece $64 = 2^6$ şi $32 = 2^5$, ecuaţia este echivalentă cu

$$2^{6x} = 2^5 \Leftrightarrow 6x = 5 \Leftrightarrow \boxed{x = \tfrac{5}{6}}$$

(e) Verificăm pentru fiecare dintre cele 5 valori posibile ale lui n dacă relaţia este adevărată : $5^1 = 5 < 30$, $5^2 = 25 < 30$, $5^3 = 125 > 30$, $5^4 = 625 > 30$, $5^5 = 3125 > 30$. Cum 2 din cele 5 numere satisfac inegalitatea, probabilitatea este $\boxed{\dfrac{2}{5}}$.

3. Subiectul II.2

Rezolvare.

(a) Pentru orice x real, avem $f'(x) = \boxed{7x^6 + 2}$.

(b) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \left(\frac{x^8}{8} + x^2 - x\right)\Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{8}}$

(c) Conform definiţiei derivatei unei funcţii într-un punct, limita cerută este $f'(0) = \boxed{2}$.

(d) Deoarece $f'(x) = 7x^6 + 2 > 0$ pentru orice x real, rezultă că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(e) Limita se scrie $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\left(2 + \frac{3}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(5 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)} = \boxed{\frac{2}{5}}$, deoarece $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) $\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = \boxed{-1}$

(b) $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{I_2}$

(c) $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) = \boxed{2}$

(d) Deoarece $A^2 = I_2$, rezultă că A este inversabilă şi $\boxed{A^{-1} = A}$.

(e) Fie $U, V \in C(A)$, adică $UA = AU$ şi $VA = AV$. Folosind asociativitatea înmulţirii matricelor, avem $(UV)A = U(VA) = U(AV) = (UA)V = (AU)V = A(UV)$. Deci $UV \in C(A)$.

(f) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in C(A)$. Din relaţia $XA = AX$ obţinem

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \Rightarrow c = b, d = a$$

Deci $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

(g) **Prima soluţie.** Din $Y^{2007} = O_2$ rezultă $(\det A)^{2007} = \det(Y^{2007}) = 0$, adică $\det(Y) = 0$. Deoarece $Y \in C(A)$, conform punctului anterior, există $a, b \in \mathbb{C}$ astfel ca $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$. Urma matricei Y este $\operatorname{tr}(Y) = 2a$ şi relaţia Hamilton-Cayley se scrie atunci $Y^2 - 2aY = O_2 \Leftrightarrow Y^2 = 2aY$. Obţinem de aici $O_2 = Y^{2007} = (2a)^{2006}Y$, de unde $2a = 0$ sau $Y = O_2$. Din $2a = 0$ şi din faptul că $\det(A) = 0 \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow b = \pm a$ rezultă de asemenea că $Y = O_2$. Deci $Y = O_2$.

A doua soluţie. Demonstrăm mai întâi că dacă o matrice $Z \in C(A)$ satisface $Z^2 = O_2$, atunci $Z = O_2$.

Conform (f) există $a, b \in \mathbb{C}$ astfel ca $Z = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$. Atunci $O_2 = A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$. Din relaţia $2ab = 0$, rezultă că unul dintre a şi b este nul. Fără a restrânge generalitatea, presupunem că $a = 0$. Atunci din $a^2 + b^2 = 0$, rezultă şi că $b = 0$, deci $Z = O_2$.

Revenim la rezolvarea acestui punct. Din $Y^{2007} = O_2$, rezultă că $Y^{2048} = O_2$. Atunci aplicând observaţia de mai sus pentru $Z = Y^{1024}$ care este în $C(A)$ conform (e), obţinem $Y^{1024} = O_2$. Continuăm pe această idee şi avem $Y^{1024} = O_2 \Rightarrow Y^{512} = O_2 \Rightarrow Y^{256} = O_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow Y^4 = O_2 \Rightarrow Y^2 = O_2 \Rightarrow Y = O_2$.

5. Subiectul IV

Rezolvare.

(a) Fie $x \in \mathbb{R}$. Utilizând faptul că $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, obţinem

$$f(x + 2\pi) = 2 + \arcsin(\sin(x + 2\pi)) = 2 + \arcsin(\sin x) = f(x)$$

(b) Cum pentru $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, avem $\arcsin(\sin x) = x$, rezultă că

$$f(0) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 + 0 + 2 + \frac{\pi}{2} = \boxed{4 + \frac{\pi}{2}}$$

(c) Codomeniul funcţiei *arcsin* este intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, adică

$$\arcsin \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \forall \alpha \in [-1, 1]$$

Rezultă $\arcsin(\sin x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \forall x \in \mathbb{R}$ şi de aici

$$f(x) \in \left[2 - \frac{\pi}{2}, 2 + \frac{\pi}{2}\right], \forall x \in \mathbb{R}$$

(d) Considerăm şirurile $(x_n)_n$ şi $(y_n)_n$ definite prin $x_n = n\pi,\ y_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, ambele având limita $+\infty$. Atunci

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f(x_n) &= \lim_{n\to\infty}(2 + \arcsin(\sin(n\pi))) = \lim_{n\to\infty}(2 + \arcsin 0) = 2 \\ \lim_{n\to\infty} f(y_n) &= \lim_{n\to\infty}(2 + \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi))) = \lim_{n\to\infty}(2 + \arcsin 1) \\ &= 2 + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Deoarece şirurile $(f(x_n))$ şi $(f(y_n))$ au limite diferite, rezultă că f nu are limită spre $+\infty$.

(e) Fie G o primitivă a funcţiei f, adică $G'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Dar, de la punctul (c) avem $f(x) \geq 2 - \dfrac{\pi}{2} > 0, \forall x \in R$, deci $G'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ şi în consecinţă G este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(f) Fie $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Cum pentru $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, avem $\arcsin(\sin t) = t$, iar $[0, x] \subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (sau $[x, 0] \subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, dacă $x < 0$) rezultă că

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x (2 + t)\,dt = \left(2t + \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^x = 2x + \frac{x^2}{2}$$

(g) F este o primitivă a funcţiei f. Conform punctului (e) F este strict crescătoare. Cum $\sqrt{2006} < \sqrt{2007}$, vom avea şi $F(\sqrt{2006}) < F(\sqrt{2007})$.

Pro Didactica vă urează succes la BAC.
De la toamnă vă aşteptăm cu întrebări din materia de facultate.