BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 86

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 86

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) $|OC| = \sqrt{(-1-0)^2+(2-0)^2} = \boxed{\sqrt{5}}$

(b) Aria triunghiului ABC este dată de $\frac{|\Delta|}{2}$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -4$. Deci aria este $\boxed{2}$.

(c) Raza cercului de ecuaţie $(x-0)^2+(y-0)^2 = (\sqrt{2})^2$ este $\boxed{\sqrt{2}}$.

(d) Punctele A şi B sunt pe cercul de ecuaţie $x^2+y^2 = 2$, în timp ce C şi O nu sunt (verificare simplă prin substituirea coordonatelor în ecuaţia cercului).

Deci probabilitatea este $\frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$.

(e) Coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB}$ sunt $(1-1,-1-1) = \boxed{(0,-2)}$.

(f) Partea reală a numărului complex $(1+2i)^2 = 1+4i+4i^2 = 1+4i-4 = -3+4i$ este $\boxed{-3}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) $2^{x^2+x} = 4 \Leftrightarrow 2^{x^2+x} = 2^2 \Leftrightarrow x^2+x = 2 \Leftrightarrow x^2+x-2 = 0 \Leftrightarrow x \in \boxed{\{-2,1\}}$

(b) Raţia progresiei aritmetice este $r = \frac{a_3-a_1}{2} = 2$. Atunci

$$a_7 = a_1+6r = 1+6\cdot 2 = \boxed{13}.$$

(c) $C_7^5 - C_7^2 = \frac{7!}{5!\cdot 2!} - \frac{7!}{2!\cdot 5!} = \boxed{0}$. De altfel, ştim cu toţii că $C_n^k = C_n^{n-k}$, pentru orice $n,k \in \mathbb{N}$ cu $k \leq n$.

(d) $\log_2 \frac{1}{4} + \log_2 8 = \log_2\left(\frac{1}{4}\cdot 8\right) = \log_2 2 = \boxed{1} \in \mathbb{N}$

(e) Restul împărţirii polinomului $f = X^4-2X^3+3X^2-4X+a$ la polinomul $X-1$ este $f(1) = 1^4-2\cdot 1^3+3\cdot 1^2-4\cdot 1+a = a-2$. Atunci din enunţ avem $a-2 = 2$, deci $a = \boxed{4}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Este util să scriem funcţia sub forma $f(x) = x \cdot e^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Atunci

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = \boxed{(1-x)e^{-x} = \frac{1-x}{e^x}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(b) Punctele de extrem sunt printre punctele critice, care sunt soluţiile ecuaţiei $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{e^x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Cum $f'(x) > 0$ pentru $x < 1$ şi $f'(x) < 0$ pentru $x > 1$, rezultă că $x = \boxed{1}$ este punct de extrem pentru f şi anume este un punct de maxim global.

(c) Calculăm $f''(x) = ((1-x)e^{-x})' = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Singura soluţie a ecuaţiei $f''(x) = 0$ este $x = 2$. Cum în acest punct f'' are schimbare de semn, rezultă că $x = \boxed{2}$ este punct de inflexiune pentru graficul lui f.

(d) Integrând prin părţi, avem

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(-x)\,dx &= \int_0^1 (-x \cdot e^x)\,dx = -\int_0^1 x(e^x)'\,dx \\ &= -xe^x\Big|_0^1 + \int_0^1 e^x\,dx = -e + e^x\Big|_0^1 = \boxed{-1} \end{aligned}$$

(e) Avem un caz de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicăm regula lui l'Hopital şi obţinem

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0}.$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Deoarece matricea A are prima linie identică cu ultima, $\det A = \boxed{0}$. De asemenea, matricea $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ are numai elemente nule pe linia a doua, deci $\det B = \boxed{0}$.

(b) Cum $\det A = \det B = 0$, ambele matrice au rangul mai mic decât 3. Minorul matricei A obţinut prin eliminarea primei linii şi primei coloane este I_2, matrice cu determinantul nenul, deci rangul lui A este $\boxed{2}$. De asemenea, minorul matricei B obţinut prin eliminarea celei a doua linii şi a doua coloane este $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, matrice cu determinantul $-1 \neq -0$. Prin urmare, rangul lui B este $\boxed{2}$.

(c) Prin calcul direct,

$$B^2 = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}}$$

$$B^3 = B \cdot B^2 = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} = B}$$

(d) *Verificarea.* Pentru $n = 1$, într-adevăr $A^1 = \begin{pmatrix}2^0&0&2^0\\0&1&0\\2^0&0&2^0\end{pmatrix}$.

Pasul de inducţie. Presupunem că $A^n = \begin{pmatrix}2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&1&0\\2^{n-1}&0&2^{n-1}\end{pmatrix}$. Atunci

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix}2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&1&0\\2^{n-1}&0&2^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2^{n-1}+2^{n-1}&0&2^{n-1}+2^{n-1}\\0&1&0\\2^{n-1}+2^{n-1}&0&2^{n-1}+2^{n-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2^n&0&2^n\\0&1&0\\2^n&0&2^n\end{pmatrix}$$

Conform principiului inducţiei matematice, demonstraţia este încheiată.

(e) Avem $A = B + I_3$, deci $A^2 = (B + I_3)^2 = B^2 + 2B + I_3$. Luăm $a = \boxed{2}$ şi $b = \boxed{1}$.

(f) Folosind punctul (c), pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, avem $B^{2k+1} = B$, $B^{2k} = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

Atunci $I_3 + B + B^2 + \ldots + B^{2k-1} + B^{2k} = \begin{pmatrix}k&0&k\\0&1&0\\k&0&k\end{pmatrix}$. Este suficient atunci să luăm $k = 2^{n-1}$ şi avem $I_3 + B + B^2 + \ldots + B^{2k-1} + B^{2k} = A^n$.

(g) Presupunem că există $p \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$A + A^2 + \ldots + A^n = I_3 + B + B^2 + \ldots + B^p$$

Fiecare din matricele din membrul stâng are 1 în centru, deci suma din membrul stâng este o matrice care va avea în centru elementul n. Matricele din membrul drept au toate 0 în centru, cu excepţia lui I_3 care are 1. Atunci suma din membrul drept va avea 1 elementul din centru. Dar $n \geq 2 > 1$. Contradicţie.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x > -\frac{e}{k}$, avem $f_k'(x) = \boxed{\frac{k}{e + kx}}$.

(b) Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, funcţia f_k este continuă pe domeniul de definiţie, deci $\lim_{x\to 0} f_k(x) = f_k(0) = \ln e = \boxed{1}$

(c) Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Atunci $1 - a + a(1-b) = 1 - a + a - ab = 1 - ab$.

(d) Conform definiţiei derivatei unei funcţii într-un punct, limita este $f_k'(0) = \boxed{\frac{k}{e}}$.

(e) Rescriem numărătorul folosind identitatea de la punctul (c). Folosind apoi punctele (b) şi (d), avem

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-f_1(x)f_2(x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-f_1(x)+f_1(x)(1-f_2(x))}{x}\\ &= -f_1'(0)+f_1(0)(-f_2'(0)) = -\frac{1}{e}+1\cdot\left(-\frac{2}{e}\right)\\ &= \boxed{-\frac{3}{e}}\end{aligned}$$

(f) Avem

$$\begin{aligned} &1 - a_1 + a_1(1-a_2) + a_1a_2(1-a_3) + \ldots + a_1a_2\ldots a_{n-1}(1-a_n) = \\ = \; &(1-a_1) + (a_2 - a_1a_2) + (a_1a_2 - a_1a_2a_3) + \ldots + (a_1a_2\ldots a_{n-1} - a_1a_2\ldots a_{n-1}a_n)\\ = \; &1 - a_1a_2\ldots a_n\,.\end{aligned}$$

(g) Acest punct este o generalizare a punctului (e), dar metoda pe care trebuie să o folosim este exact aceeaşi. Folosim punctul precedent ca să rescriem numărătorul fracţiei şi apoi folosim punctele (b) şi (d). Avem

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0}\frac{1-f_1(x)f_2(x)\ldots f_n(x)}{x} = \\ = \; &\lim_{x\to 0}\frac{1-f_1(x)+f_1(x)(1-f_2(x))+\ldots+f_1(x)f_2(x)\ldots f_{n-1}(x)(1-f_n(x))}{x}\\ = \; &-f_1'(0)-f_1(0)f_2'(0)-f_1(0)f_2(0)f_3'(0)-\ldots-f_1(0)f_2(0)\ldots f_{n-1}(0)f_n'(0)\\ = \; &-\frac{1+2+\ldots+n}{e}\\ = \; &\boxed{-\frac{n(n+1)}{2e}}.\end{aligned}$$

Comentariu. La acelaşi rezultat se poate ajunge şi direct prin folosirea regulii lui l'Hopital.

PRO DIDACTICA VĂ UREAZĂ SUCCES LA BAC.
DE LA TOAMNĂ VĂ AŞTEPTĂM CU ÎNTREBĂRI DIN MATERIA DE FACULTATE.