BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 85

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 85

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Observăm că dreapta AB este verticală. Ecuaţia ei este $x = 2$. Distanţa căutată este atunci $\boxed{2}$ ▼[detalii]

Este distanţa de la C la punctul de coordonate $(2,4)$ de pe dreaptă.

(b) Mijlocul M al segmentului BC are coordonatele $\left(\frac{2+0}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (1,2)$. Mediana din A este dreapta AM. Ecuaţia ei este $\boxed{y = 2}$ (atât A cât şi M au ordonata 2).

(c) Triunghiul AOB este dreptunghic cu unghiul drept în B. Acest triunghi este şi isoscel căci segmentele AB şi OB au ambele lungimea 2. Deci măsura unghiului $\widehat{AOB}$ este $45°$ şi astfel $\cos \widehat{AOB} = \boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.

(d) Folosim formula $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{0}$.

(e) $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(2-0)^2 + (2-4)^2} = \boxed{2\sqrt{2}}$.

(f) Folosind formula indicată, avem

$$\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sin\left(2\frac{\pi}{8}\right)}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}}.$$

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Fie a_1 primul termen, iar r raţia progresiei. Atunci

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r = 5 \\ a_5 &= a_1 + 4r = 14 \end{aligned}$$

Scăzând din a doua ecuaţie pe prima, deducem $3r = 9$ şi de aici $r = 3$. Atunci $a_6 = a_5 + r = 14 + 3 = \boxed{17}$.

(b) Avem $|2m - 1| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq 2m - 1 \leq 4 \Leftrightarrow -3 \leq 2m \leq 5 \Leftrightarrow -3/2 \leq m \leq 5/2$. Dar $m \in \mathbb{Z}$, deci $m \in \boxed{\{-1, 0, 1, 2\}}$.

(c) Polinoamele de gradul al doilea considerate sunt de forma $aX^2 + bX + c$, cu $a, b, c \in \{0, 3, 6, 9\}$, $a \neq 0$ (altfel am avea un polinom de grad inferior lui 2). Deci pe a îl putem alege în 3 moduri, iar pe fiecare dintre b şi c în 4 moduri. Aşadar există $3 \cdot 4 \cdot 4 = \boxed{48}$ polinoame de tipul considerat.

(d) Nu este nevoie să rezolvăm ecuaţia, este suficient să verificăm care din valori o satisface. Vedem că $x = 3$ este singura soluţie dintre elementele mulţimii, deci probabilitatea este $\boxed{\frac{1}{4}}$.

(e) Produsul a două numere impare este tot număr impar, deci $\boxed{A}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ la înmulţire. Cum $2 \in B$ şi $2 \cdot 2 = 4 \notin B$, rezultă că B nu este parte stabilă.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x > \frac{1}{2}$, avem

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+1-(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{1}{4x^2-1} = f(x)\,.$$

(b) Folosind punctul precedent, obţinem o sumă telescopică în care toţi termenii se vor reduce doi câte doi cu excepţia primului şi ultimului:

$$\begin{aligned} f(1) + f(2) + \ldots + f(n) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 1-1} - \frac{1}{2\cdot 1+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 2-1} - \frac{1}{2\cdot 2+1}\right) + \\ &\quad + \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right). \end{aligned}$$

(c) Folosind punctul (b) limita este $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$

(d) Folosind punctul (a), obţinem

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[-2(2x-1)^{-2} + 2(2x+1)^{-2}\right] = \boxed{\frac{1}{(2x+1)^2} - \frac{1}{(2x-1)^2}},\ \forall x > \frac{1}{2}\,.$$

(e) Cu schimbarea de variabilă $y = 4x^2 - 1$, avem $dy = 8x\,dx$. Deci

$$\int_1^{\sqrt{2}} 8x f(x)\,dx = \int_3^7 \frac{1}{y}\,dy = \boxed{\ln\frac{7}{3}}.$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Fie $x = [x] + \{x\}$. Atunci $x + k = [x] + k + \{x\}$ şi cum $[x] + k \in \mathbb{Z}$, iar $\{x\} \in [0, 1)$, avem $[x + k] = [x] + k$.

(b) Avem $A = \left(\frac{2}{3} \wedge \frac{3}{2}\right) \wedge \frac{4}{3} = \left(\frac{2}{3} \wedge \frac{3}{2}\right) + \left[\frac{4}{3}\right] = \left(\frac{2}{3} + \left[\frac{3}{2}\right]\right) + 1 = \boxed{\frac{2}{3} + 2}$ şi $B = \frac{2}{3} \wedge \left(\frac{3}{2} \wedge \frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3} \wedge \left(\frac{3}{2} + \left[\frac{4}{3}\right]\right) = \frac{2}{3} \wedge \frac{5}{2} = \frac{2}{3} + \left[\frac{5}{2}\right] = \boxed{\frac{2}{3} + 2}$

(c) Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\begin{aligned} (x \wedge y) \wedge z &= (x \wedge y) + [z] = (x + [y]) + [z] = x + [y] + [z] \\ x \wedge (y \wedge z) &= x \wedge (y + [z]) = x + [y + [z]] \overset{(a)}{=} x + [y] + [z] \end{aligned}$$

Deci $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$ şi astfel legea este asociativă.

(d) Este suficient un contraexemplu: $0 \wedge \frac{1}{2} = 0$ şi $\frac{1}{2} \wedge 0 = \frac{1}{2}$.

(e) Procedăm prin reducere la absurd. Presupunem că există $e \in \mathbb{R}$ astfel ca $e \wedge a = a \wedge e = a,\ \forall a \in \mathbb{R}$. De aici $a = e \wedge a = e + [a]$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$. Pentru $a = 0$ obţine $e = 0$, iar pentru $a = \frac{1}{2}$ avem $e = \frac{1}{2}$. Contradicţie.

(f) Avem $(c \wedge c) \wedge c = (c + [c]) + [c] = c + 2[c]$. Ecuaţia devine

$$c + 2[c] = c \Leftrightarrow [c] = 0 \Leftrightarrow \boxed{c \in [0, 1)}.$$

(g) Fie $x \in \mathbb{R}$. Se arată uşor că $x^{\wedge n} \overset{def}{=} \underbrace{x \wedge x \wedge x \wedge \ldots \wedge x}_{n-ori} = x + (n-1)[x]$ (cum legea este asociativă nu avem nevoie de paranteze). Pentru orice $x \in H$, avem $[x] = x$, deci $x^{\wedge n} = nx \in H$. Dacă $x \neq 0$, atunci funcţia $\mathbb{N} \ni n \mapsto nx \in H$ este injectivă, de unde rezultă că H conţine o infinitate de termeni, contradicţie. Deci $H = \boxed{\{0\}}$.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x > 0$ avem $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \boxed{\frac{x-1}{x}}$ şi $g'(x) = \boxed{-2\pi \sin 2\pi x}$.

(b) Cum $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0,\ \forall x > 0$, rezultă că f este convexă pe $(0, \infty)$.

(c) Observăm că $f'(x) = \frac{x-1}{x} \begin{cases} < 0, & x < 1 \\ > 0, & x > 1 \end{cases}$, deci f are un minim global în $x = 1$. Astfel $f(x) \geq f(1) = 1,\ \forall x > 0$.

(d) Folosind punctul (c) observăm că $g(x) \leq 1 \leq f(x),\ \forall x > 0$. Pentru a avea $f(x) = g(x)$ trebuie să avem egalitate în ambele inegalităţi de mai sus. Dar $f(x) = 1$, doar pentru $x = 1$. Cum $g(1) = \cos 2\pi = 1$, singura soluţie a ecuaţiei este $\boxed{x = 1}$.

(e) Aria este egală cu $\int_1^e \left|f(x)\right| dx$. Deoarece f este strict pozitivă, integrând prin părţi obţinem

$$\begin{aligned}\int_1^e \left|f(x)\right| dx &= \int_1^e (x-\ln x)\,dx = \int_1^e x\,dx - \int_1^e (x)'\ln x\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\Big|_1^e - x\ln x\Big|_1^e + \int_1^e x(\ln x)'\,dx\\ &= \frac{e^2-1}{2} - e\ln e + 1\cdot\ln 1 + \int_1^e 1\,dx\\ &= \frac{e^2-1}{2} - e + e - 1 = \boxed{\frac{e^2-3}{2}}.\end{aligned}$$

(f) Folosind de două ori regula lui l'Hopital pentru cazuri de nedeterminare $\frac{0}{0}$, avem

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-g(x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2\pi x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\pi\sin 2\pi x}{2x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{4\pi^2\cos 2\pi x}{2} = \boxed{2\pi^2}\end{aligned}$$

(g) Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $g(n) = \cos 2\pi n = 1$, deci $\lim_{n\to\infty} g(n) = \boxed{1}$.

Comentariu: Enunţul ar fi trebuit ceva de genul "Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $x_n = g(n)$. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} x_n$." In forma publicată nu este clar că avem limita unui şir, litera n nu defineşte obligatoriu numai numere naturale. Dacă avem de a face cu limita unei funcţii (adică $n \in \mathbb{R}$), atunci limita nu există.