BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 84

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 84.

1. Subiectul I

Rezolvare.

(a) $|2i| = 2|i| = \boxed{2}$.

(b) Din teorema lui Pitagora lungimea ipotenuzei este egală cu $\sqrt{12^2 + 5^2} = \boxed{13}$ (număr cu noroc).

(c) $\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}$.

(d) Produsul scalar al vectorilor $\vec{v}$ şi $\vec{w}$ este $\vec{v} \cdot \vec{w} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-5) = \boxed{1}$.

(e) Aria triunghiului ABC este $S = \frac{|\Delta|}{2}$, unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & \alpha - 5 & \alpha + 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \alpha + 2 .$$

Condiţia din enunţ revine la $\frac{|\Delta|}{2} = 2 \iff |\alpha + 2| = 4 \iff \alpha \in \{-6, 2\}$. Deoarece căutăm numai soluţii pozitive obţinem $\boxed{\alpha = 2}$.

(f)

$$a + bi = \frac{3 + i}{3i - 1} = \frac{i(-3i + 1)}{3i - 1} = -i,$$

aşadar $\boxed{a = 0,\ b = -1}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Deoarece în $\mathbb{Z}_8$ avem $\hat{5}^2 = \widehat{25} = \hat{1}$ rezultă $\hat{5}^{2007} = \hat{5} \cdot (\hat{5}^2)^{1003} = \hat{5} \cdot \hat{1} = \boxed{\hat{5}}$.

(b) Avem $\frac{C_8^5}{C_8^3} = \frac{C_8^3}{C_8^3} = \boxed{1}$. Reamintim că, în general, $C_n^k = C_n^{n-k}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi $k \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le n$.

(c) $\log_5 x + \log_5 3 = 2 \iff \log_5(3x) = 2 \iff 3x = 5^2 \iff \boxed{x = \frac{25}{3}}$.

(d) Notând cu $t = 2^x$ obţinem ecuaţia $t^2 + t = 6 \iff t^2 + t - 6 = 0$ cu soluţiile $t \in \{-3, 2\}$. Ecuaţia $2^x = -3$ nu are soluţii reale, iar ecuaţia $2^x = 2$ are soluţia unică $\boxed{x = 1}$.

(e) Deoarece $\sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2 < \sqrt{5}$, inegalitatea din enunţ este satisfăcută de trei numere din cinci. Probabilitatea acestui eveniment este $\boxed{p = \frac{3}{5}}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Avem $f'(x) = \dfrac{1 \cdot (x^2+4) - x \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \boxed{\dfrac{4-x^2}{(x^2+4)^2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Folosim schimbarea de variabilă $y = x^2 + 4$. Atunci $dy = 2x\,dx$ şi obţinem

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+4} = \int_4^5 \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2} \ln y\Big|_4^5 = \boxed{\tfrac{1}{2} \ln \tfrac{5}{4}}.$$

(c)

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{x}\,dx = \int_1^2 \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} \frac{x}{2}\Big|_1^2 = \boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)}.$$

(d) Folosind formula derivatei calculată la (a), observăm că $f'(x) = \dfrac{4-x^2}{\text{numitor pozitiv}}$, deci $f'(x) > 0$, $\forall x \in (-2, 2)$. Prin urmare funcţia f este strict crescătoare pe $[-2, 2]$, q.e.d.

(e) Dăm factor comun forţat pe $\sqrt{n}$, atât la numărător cât şi la numitor. Obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{2 - \frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{3+0}{2-0} = \boxed{\frac{3}{2}}.$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Coeficienţii de pe ultima coloană a matricii A sunt toţi nuli, deci $\det A = 0$. Prin urmare $\operatorname{rang} A \le 2$. Deoarece primul minor de ordinul doi este $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ rezultă $\operatorname{rang} A = 2$.

(b) Avem

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

(c) Calcul direct:

$$A + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3 .$$

(d) Alegem $B = A^2 + A + I_3$. Atunci $B \neq O_3$, deoarece coeficientul lui B de pe a treia linie şi a treia coloană este egal cu 1. Conform punctului precedent rezultă $AB = BA = A^3 + A^2 + A = O_3$.

(e) Folosind din nou punctul (c), rezultă

$$A^4 - A = (A^3 + A^2 + A)(A - I_3) = O_3 \cdot (A - I_3) = O_3,$$

q.e.d.

(f) Generalizarea punctului precedent este faptul că şirul $A, A^2, A^3, \ldots$ al puterilor consecutive ale matricii A este periodic de perioadă 3. Atunci

$$A^{2007} = A^3 \cdot (A^3)^{668} = A^3 = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

(g) Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Observăm că $aA + bA^2 + cA^3 = A(aI_3 + bA + cA^2)$, aşadar

$$\det(aA + bA^2 + cA^3) = \underbrace{\det A}_{=0} \cdot \det(aI_3 + bA + cA^2) = 0 \neq 1 = \det I_3 .$$

Prin urmare $aA + bA^2 + cA^3 \neq I_3$, q.e.d.

5. Subiectul IV.

Rezolvare. O scriere alternativă a expresiei funcţiei f este $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2+1}\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(a) $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+2} - \dfrac{2x}{x^2+1} = \boxed{-\dfrac{2x}{(x^2+1)(x^2+1)}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Limita din enunţ este exact derivata funcţiei f în $x = 0$, adică $f'(0) = \boxed{0}$.

(c) Studiem semnul derivatei f'. Cu formula derivatei obţinută la punctul (a) constatăm că $f'(x) \begin{cases} > 0 & , x \in (-\infty, 0) \\ < 0 & , x \in (0, \infty) \end{cases}$. Prin urmare f este strict crescătoare pe $(-\infty, 0]$ respectiv strict descrescătoare pe $[0, \infty)$.

(d) Am văzut la punctul precedent că $x = 0$ este punct de maxim global al funcţiei f. Deci $f(x) \leq f(0) = \ln 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Celalaltă inegalitate rezultă direct din expresia lui f şi monotonia funcţiei logaritm:

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2+1}\right) > \ln 1 = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} .$$

(e) Avem

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2+1}\right) = \ln(1+0) = \boxed{0}.$$

(f) Deoarece ni se serveşte primitiva pe tavă, ţinând cont şi de teorema Leibnitz–Newton, nu avem decât să verificăm faptul că membrul drept

- este o primitivă a funcţiei $x \mapsto \ln(x^2+a^2)$.
- ia valoarea 0 în $x = 0$.

Cea de a doua condiţie este evident satisfăcută. Verificăm şi prima condiţie:

$$\begin{aligned}\left(x\ln(x^2+a^2) - 2x + 2a\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)' &= \ln(x^2+a^2) + x\cdot\frac{2x}{x^2+a^2} - 2 + 2a\cdot\frac{1}{\frac{x^2}{a^2}+1}\cdot\frac{1}{a}\\ &= \ln(x^2+a^2) + \frac{2x^2}{x^2+a^2} - 2 + \frac{2a^2}{x^2+a^2}\\ &= \ln(x^2+a^2), \quad \forall x \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

q.e.d.

(g) Deoarece f este strict pozitivă pe $\mathbb{R}$, aria cerută în enunţ este

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 \ln(x^2+2)\,dx - \int_0^1 \ln(x^2+1)\,dx\\ &= \ln 3 - 2 + 2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} - (\ln 2 - 2 + 2\operatorname{arctg} 1)\\ &= \boxed{\ln\frac{3}{2} + 2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2}}.\end{aligned}$$

Am folosit formula de la punctul (f) pentru $a = \sqrt{2}$ respectiv $a = 1$.