BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 83

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 83

1. Subiectul I

Rezolvare.

(a) Partea reală a numărului

$$(-2+3i)(-1+4i) = 2-12-3i-8i = -10-11i$$

este egală cu $\boxed{-10}$.

(b) Aria triunghiului este $S = \frac{1}{2}|\Delta|$, unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -8\,,$$

aşadar $S = \boxed{4}$.

(c) Cu formula uzuală (teorema lui Pitagora) obţinem

$$|AB| = \sqrt{(-1-(-2))^2 + (4-3)^2} = \boxed{\sqrt{2}}\,.$$

(d) Centrul de greutate are coordonatele

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{-2-1+3}{3} = 0, \quad , y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{3+4+0}{3} = \frac{7}{3}\,,$$

deci este localizat în punctul $\boxed{G\left(0, \frac{7}{3}\right)}$.

(e) Dreapta din enunţ conţine punctele A şi B dacă şi numai dacă coordonatele lor îi verifică individual ecuaţia. Obţinem sistemul:

$$\begin{cases} -2a+3b+5=0 \\ -a+4b+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5b-5=0 \\ -a+4b+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-1 \\ -a-4+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} b=-1 \\ a=1 \end{cases}}\,.$$

(f) Am văzut mai sus la punctul (c) că $|AB| = \sqrt{2}$. În mod analog calculăm şi

$$|BC| = \sqrt{(3-(-1))^2 + (0-4)^2} = 4\sqrt{2}\,.$$

Aria triunghiului ABC este

$$S = \frac{|AB| \cdot |BC| \cdot \sin \hat{B}}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \sin \hat{B}}{2} = 4 \sin \hat{B}\,.$$

Pe de altă parte, am stabilit deja la punctul (b) că $S = 4$. De aici rezultă $\boxed{\sin \hat{B} = 1}$ (triunghiul este dreptunghic în B).

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Deoarece funcţiile exponenţiale sunt injective, ecuaţia revine la

$$2x^2 - 1 = 7 \iff 2x^2 = 8 \iff x^2 = 4 \iff \boxed{x \in \{-2, 2\}}.$$

(b) Rezolvăm ecuaţia:

$$\log_2(1 + x) = 2 \iff 1 + x = 2^2 = 4 \iff x = 3.$$

Probabilitatea ca un număr ales la întâmplare din mulţimea $\{1, 2, 3, 4\}$ să fie trei este $\boxed{p = \frac{1}{4}}$.

(c) Într-adevăr,

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{x + 3 - x}{x(x+3)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{x(x+3)} = \frac{1}{x(x+3)}, \quad \forall x > 0.$$

(d) Această problemă este greşită.

(e) Notând $b_1 = x$ şi raţia progresiei cu q, ipoteza din enunţ revine la

$$\begin{cases} qx - x = 4 \\ q^2x - x = 16 \end{cases} \iff \begin{cases} (q-1)x = 4 \\ (q^2-1)x = 16 \end{cases}$$

Prin împărţire, obţinem

$$4 = \frac{16}{4} = \frac{(q^2-1)x}{(q-1)x} = q + 1 \Rightarrow q = 3.$$

De aici obţinem $x = \frac{4}{3-2} = \boxed{2}$. Această soluţie nu ar fi completă fără verificarea faptului că datele obţinute generează o progresie geometrică cu proprietăţile din enunţ. Or, progresia geometrică găsită are primii termeni $2, 6, 18$. Se verifică imediat faptul că $6 - 2 = 4$ respectiv $18 - 2 = 16$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Derivata funcţiei f este dată de

$$f'(x) = 2007^x \cdot \ln 2007, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Limita din enunţ este tocmai derivata funcţiei f în $x = 1$, adică $\boxed{f'(1) = 2007 \cdot \ln 2007}$.

(b) Avem

$$\int_1^2 f9x)\,dx = \int_1^2 2007^x\,dx = \left.\frac{2007^x}{\ln 2007}\right|_1^2 = \boxed{\frac{2007^2 - 2007}{\ln 2007}}.$$

(c) Pentru orice $x \in (0, \infty)$ avem

$$(f \circ g)(x) = f(\log_{2007} x) = 2007^{\log_{2007} x} = \boxed{x}.$$

Practic, am folosit definiţia logaritmului!

(d) Deoarece

$$f''(x) = 2007^x \cdot (\ln 2007)^2 > 0, \quad \forall x \in (0, \infty),$$

funcţia f este convexă pe intervalul $(0, \infty)$. De altfel, f este convexă pe $\mathbb{R}$, nu numai pe intervalul din enunţ.

(e) Folosind propoziţia de la punctul (c), ecuaţia din enunţ revine la

$$x = 4x^3 \;\Leftrightarrow\; 4x^3 - x = 0 \;\Leftrightarrow\; x(4x^2 - 1) = 0 \;\Leftrightarrow\; x \in \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}.$$

Deoarece convin numai valorile strict pozitive, am găsit soluţia unică $\boxed{x = \frac{1}{2}}$.

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Avem $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}}$.

(b) Avem $\det A = 2 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 = 1$ respectiv $\det B = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 2 = 1$.

(c) Avem

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

(d) Deoarece am văzut că $\det A = 1 \neq 0$, matricea A este inversabilă şi

$$A^{-1} = A^* = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}.$$

(e) Deoarece A este inversabilă, avem

$$AX = B \;\Leftrightarrow\; X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}.$$

(f) Produsul a două matrici triangulare de forma $\begin{pmatrix}1 & *\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix}1 & *\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ este tot o matrice triangulară de forma $\begin{pmatrix}1 & *\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Prin urmare toate matricile $B, B^2, \ldots$ au această formă. În final,

$$B + B^2 + \ldots + B^{2007} = \begin{pmatrix}2007 & *\\ 0 & 2007\end{pmatrix}.$$

Evident că matricea de mai sus este inversabilă, deci are rangul $\boxed{2}$. Putem chiar să-i calculăm determinantul care este 2007^2. Nu e nevoie să calculăm elementul de pe linia întâi, a doua coloană!

(g) Fie $X = \begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$. Atunci

$$XA = BX \quad\Leftrightarrow\quad XA - BX = O_2 \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix} = O_2$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - y - 2z = 0\\ x - y - 2t = 0\\ z - t = 0\\ z - t = 0\end{cases}$$

Ultimul sistem este compatibil nedeterminat. Luând de exemplu $z = \alpha$, $y = \beta$ obţinem imediat $t = \alpha$, $x = \beta + 2\alpha$. Prin urmare soluţiile ecuaţiei din enunţ sunt matricile de forma

$$\boxed{X = \begin{pmatrix}\beta + 2\alpha & \beta\\ \alpha & \alpha\end{pmatrix}}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

5. Subiectul IV.

Rezolvare. Descompunând funcţia raţională f în fracţii simple, avem

$$f(x) = \frac{2x-4}{x^2-4x+3} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3}, \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}.$$

Într-adevăr, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$ avem

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} = \frac{x-3+x-1}{(x-1)(x-3)} = \frac{2x-4}{x^2-4x+3}.$$

(a) Dăm factor forţat pe x^2 atât la numitor cât şi la numărător:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-4}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{0-0}{1-0+0} = \boxed{0}.$$

Un argument alternativ (chiar mai uşor) este utilizarea celei de a doua expresii a funcţiei f de mai sus.

(b) Folosind observaţia de la începutul rezolvării, avem

$$f(x) - \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3}\right) = \boxed{0}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1,3\}.$$

(c) Folosind din nou a doua formă a funcţiei f, obţinem

$$f'(x) = \boxed{-\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-3)^2}}.$$

(d) Folosind formula derivatei de la punctul precedent, constatăm că $f'(x) < 0, \forall x \in (3,\infty)$, prin urmare f este strict descrescătoare pe $(3,\infty)$.

(e) Se vede uşor că

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = \infty,$$

deci dreptele de ecuaţii $\boxed{x = 1}$ respectiv $\boxed{x = 3}$ sunt asimptote verticale la graficul funcţiei f. Ca fapt divers, avem şi

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty.$$

Evident, acestea sunt şi singurele asimptote verticale, funcţia f fiind definită pe tot restul dreptei reale.

(f) Avem

$$\int_{2007}^{2008} f(x)\,dx = \int_{2007}^{2008} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3}\right) dx = (\ln|x-1| + \ln|x-3|)\Big|_{2007}^{2008} = \boxed{\frac{2007\cdot 2005}{2006\cdot 2004}}.$$

(g) Scriind explicit diferenţa $a_n - 2b_n$ se observă că majoritatea termenilor se reduc doi câte doi. Mai precis, pentru $n \geq 9$ avem

$$\begin{aligned}
f(4) &= \frac{1}{1} + \frac{1}{3} \\
f(5) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\
f(6) &= \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \\
f(7) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \\
\ldots & \quad \ldots \\
f(n-2) &= \frac{1}{n-5} + \frac{1}{n-3} \\
f(n-1) &= \frac{1}{n-4} + \frac{1}{n-2} \\
f(n) &= \frac{1}{n-3} + \frac{1}{n-1},
\end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned} a_n - 2b_{n-3} &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} \\ &= \frac{13}{6} + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1}. \end{aligned}$$

Prin urmare

$$a_n - 2b_n = \frac{13}{6} - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-2} - \frac{2}{n}.$$

Evident,

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - 2b_n) = \boxed{\frac{13}{6}}.$$