BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 82

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 82

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Avem : $A_4(4,0)$ şi $B_3(0,3)$. Distanţa dintre cele două puncte este

$$|A_4B_3| = \sqrt{(4-0)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = \boxed{5}.$$

(b) Coordonatele celor două puncte sunt $A_2(2,0)$ şi $B_4(0,4)$. Ecuaţia dreptei A_2B_4 este

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -4x - 2y + 8 = 0 \Leftrightarrow \boxed{y = -2x + 4}$$

(c) Panta dreptei A_2B_4 este $m = -2$. Orice paralelă la această dreaptă trebuie să aibă panta egală tot cu -2. Punctul dat are coordonatele $B_2(0,2)$. Ecuaţia dreptei cerute va fi

$$y - 2 = -2(x-0) \Leftrightarrow \boxed{y = -2x + 2}$$

(d) Avem $A_1(1,0)$, $A_3(3,0)$, $B_3(0,3)$. Aria triunghiului va fi $S = \frac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 9 - 3 = 6$. Deci $\boxed{S = 3}$.

(e) **Prima rezolvare.** Unghiul $\widehat{A_1A_3B_3}$ este acelaşi cu unghiul $\widehat{OA_3B_3}$. Dar triunghiul, OA_3B_3 este dreptunghic isoscel, deci măsura unghiului $\widehat{OA_3B_3}$ este $45°$. Atunci $\sin \widehat{A_1A_3B_3} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

A doua rezolvare. Calculăm lungimile segmentelor $[A_1A_3]$ şi $[A_3B_3]$:

$$\begin{aligned} A_1A_3 &= \sqrt{(1-3)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{4} = 2 \\ B_3A_3 &= \sqrt{(0-3)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

Aria triunghiului $A_1A_3B_3$ este $S_{A_1A_3B_3} = \frac{A_1A_3 \cdot B_3A_3 \cdot \sin \hat{A}_3}{2}$. Ţinând cont de punctul (d) obţinem $3 = \frac{2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sin \hat{A}_3}{2}$, de unde $\sin \hat{A}_3 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

(f) Punctele A_n sunt coliniare, iar punctele B_n sunt de asemenea coliniare. Avem astfel două drepte. Unind acum fiecare punct A_i cu fiecare punct B_j obţinem încă $4 \cdot 4 = 16$ drepte. În total sunt astfel $\boxed{18}$.

2. Subiectul II.1

Rezolvare.

(a) Într-o progresie aritmetică orice termen (cu excepţia primului) este media arimetică a celor doi termeni ce-l încadrează (adică dintre termenul precedent şi termenul următor). Avem astfel $a = \dfrac{1+3}{2} = 2$, $b = \dfrac{3+5}{2} = 4$ deci $\boxed{a+b=6}$.
Comentariu. De fapt am făcut mai mult decât ni s-a cerut şi am aflat şi pe a şi b. Am fi putut afla direct pe $a+b$, din faptul că $3 = \dfrac{a+b}{2}$, de unde $\boxed{a+b=6}$.

(b) Ecuaţia se scrie $\dfrac{(n+4)! \cdot (n+5)}{(n+4)!} = 10 \Leftrightarrow n+5 = 10 \Leftrightarrow \boxed{n=5}$.

(c) **Rezolvare prin încercări.** Calculăm $\widehat{3} \cdot x$ pentru $x \in \mathbb{Z}_7$: $\widehat{3} \cdot \widehat{0} = \widehat{0}$, $\widehat{3} \cdot \widehat{1} = \widehat{3}$, $\widehat{3} \cdot \widehat{2} = \widehat{6}$, $\widehat{3} \cdot \widehat{3} = \widehat{2}$, $\widehat{3} \cdot \widehat{4} = \widehat{5}$, $\widehat{3} \cdot \widehat{5} = \widehat{1}$, $\widehat{3} \cdot \widehat{6} = \widehat{4}$. Ecuaţia are astfel o singură soluţie, şi anume $\boxed{x = \widehat{6}}$
Rezolvare directă. Puteam rezolva ecuaţia şi ţinând cont că $\mathbb{Z}_7$ este corp, deci orice element nenul al său este inversabil. Atunci $x = \widehat{3}^{-1} \cdot \widehat{4} = \widehat{5} \cdot \widehat{4} = \boxed{\widehat{6}}$.

(d) In cazul $f(4) = 3$, $f(3)$ şi $f(5)$ pot lua orice valori din mulţimea $\{3,4,5\}$. Obţinem astfel $3 \cdot 3 = 9$ funcţii. In cazul $f(3) = 5$ la fel. În total sunt deci $9 + 9 = \boxed{18}$ funcţii.

(e) Dacă echipa are 2 biologi şi 1 chimist, vom avea $C_3^2 \cdot C_4^1 = 3 \cdot 4 = 12$ posibilităţi de formare a ei. În schimb, dacă echipa are 1 biolog şi 2 chimişti, obţinem $C_3^1 \cdot C_4^1 = 3 \cdot 6 = 18$ posibilităţi. Numărul total de echipe posibile este $12 + 18 = \boxed{30}$.

3. Subiectul II.2

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x > 0$, avem $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{3}{x^4} = \boxed{\dfrac{-x^2+2x-3}{x^4}}$.

(b) Pentru asimptota orizontală spre $+\infty$ calculăm $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-x+1}{x^3} = 0$ (deoarece gradul numitorului este mai mare decât gradul numărătorului). Deci dreapta $\boxed{y=0}$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul lui f. Având asimptotă orizontală, graficul funcţiei nu mai poate avea şi asimptotă oblică.

Pentru o eventuală asimptotă verticală calculăm limita funcţiei la dreapta în 0 (la stânga nu ne permite domeniul de definiţie):

$$\lim_{x\searrow 0} f(x) = \lim_{x\searrow 0} \frac{x^2-x+1}{x^3} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Graficul lui f admite astfel şi asimptota verticală la dreapta $\boxed{x=0}$. Funcţia fiind continuă pe domeniul de definiţie, nu mai există alte asimptote verticale.

(c) Derivata funcţiei se mai poate scrie $f'(x) = \dfrac{-(x-1)^2-2}{x^4} < 0$, $\forall x > 0$. Deci f este strict descrescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.

(d) Deoarece f este strict descrescătoare, din $\sqrt{3} < \sqrt{5}$ rezultă $f(\sqrt{3}) > f(\sqrt{5})$. Deci $\boxed{a > b}$.

(e)

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x)\,dx &= \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) dx = \left(\ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}\right)\Bigg|_1^2 \\ &= \left(\ln 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \boxed{\ln 2 - \tfrac{1}{8}} \end{aligned}$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

(b) Cu formula lui Sarrus, $\det(A) = -1+0+0-0-0-0 = \boxed{-1}$

(c) Determinantul lui A fiind nenul, matricea A va avea rangul egal cu dimensiunea sa, adică $\boxed{3}$.

(d) Prin calcul direct

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

(e) Deoarece $A^2 = I_3$, rezultă că A este inversabilă, inversa sa fiind $\boxed{A^{-1} = A}$.

(f) Conform punctului (d), $A^2 = I_3$. Rezulta astfel că $A^{2k} = I_3^k = I_3$, $A^{2k+1} = A^{2k}A = I_3A = A, \forall k \in \mathbb{N}^*$. Atunci

$$\begin{aligned} X &= A + I_3 + A + I_3 + ... + A + I_3 + A = 1004A + 1003I_3 \\ &= \begin{pmatrix} 1004 & 0 & 0 \\ 3012 & -1004 & 0 \\ 0 & 0 & 1004 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1003 & 0 & 0 \\ 0 & 1003 & 0 \\ 0 & 0 & 1003 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2007 & 0 & 0 \\ 3012 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2007 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Deci $\det(X) = \boxed{-2007^2}$.

(g) Fie $Y = AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vom demonstra că $Y^n \neq I_3, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Avem $Y^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 16 & 0 \\ 24 & 55 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Intuim că vom avea $Y^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & 0 \\ c_n & d_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, cu $a_n, b_n, c_n, d_n > 0$. Să verificăm acest lucru prin inducţie.

Notăm $P(n)$: există $a_n, b_n, c_n, d_n > 0$ astfel ca $Y^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & 0 \\ c_n & d_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Verificarea. $P(1)$ este adevărată deoarece vom lua $a_1 = 1, b_1 = 2, c_1 = 3, d_1 = 7$.

Pasul de inducţie. Presupunem $P(n)$ adevărată şi demonstrăm că $P(n+1)$ este adevărată. Admitem existenţa numerelor strict pozitive a_n, b_n, c_n, d_n din $P(n)$ şi vrem să demonstrăm existenţa numerelor $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, d_{n+1}$ din cadrul propoziţiei $P(n+1)$. Avem

$$Y^{n+1} = Y^nY = \begin{pmatrix} a_n & b_n & 0 \\ c_n & d_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + 3b_n & 2a_n + 7b_n & 0 \\ c_n + 3d_n & 2c_n + 7d_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vom lua atunci $a_{n+1} = a_n + 3b_n > 0$, $b_{n+1} = 2a_n + 7b_n > 0$, $c_{n+1} = c_n + 3d_n > 0$, $d_{n+1} = 2c_n + 7d_n > 0$ şi $P(n+1)$ este adevărată în ipoteza că $P(n)$ este adevărată. Cum $P(1)$ este adevărată, rezultă conform principiului inducţiei matematice că $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Obţinem astfel că (de exemplu) elementul de pe linia 1 , coloana 2 al matricei Y^n este strict pozitiv pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, deci Y^n nu poate fi egală cu I_3, această din urmă matrice având elementul respectiv egal cu 0.

5. Subiectul IV

Rezolvare.

(a) Prin calcul direct, pentru orice $x \geq 0$ avem
$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{x+2-x-1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = f(x)$$

(b) Pentru orice $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{-(x^2+3x+2)'}{(x^2+3x+2)^2} = \boxed{\dfrac{-2x-3}{(x^2+3x+2)^2}}$.

(c) Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \dfrac{1}{\infty} = 0$, rezultă că dreapta $\boxed{y=0}$ este asimptotă orizontală spre infinit pentru graficul lui f.

(d) Pentru $x > 0$, $f'(x) < 0$, deci f este strict descrescătoare pe $[0, \infty)$.

(e) Utilizăm descompunerea funcţiei f dată de punctul (a):
$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) dx \\ &= (\ln|x+1| - \ln|x+2|)\big|_0^1 \\ &= (\ln 2 - \ln 3) - (\ln 1 - \ln 2) = 2\ln 2 - \ln 3 \\ &= \ln 4 - \ln 3 = \boxed{\ln \tfrac{4}{3}}\end{aligned}$$

(f) Aplicând din nou punctul (a), avem
$$\begin{aligned}f(1) + f(2) + ... + f(n) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\end{aligned}$$

Deci, limita cerută este $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n+2}\right) = \dfrac{1}{2} - 0 = \boxed{\dfrac{1}{2}}$.

(g) Deoarece f este strict descrescătoare pe $[0, \infty)$, vom avea $f(x) \leq f(0), \forall x \geq 0$. Atunci pentru $x \geq 0$, obţinem $f(x) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x^3 f(x) \leq \frac{x^3}{2}$. Integrând pe intervalul $[0, 1]$ şi folosind monotonia integralei, deducem
$$\int_0^1 x^3 f(x)\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^3}{2}\,dx = \frac{x^4}{8}\bigg|_0^1 = \frac{1}{8}$$

PRO DIDACTICA VĂ UREAZĂ SUCCES LA BAC.
DE LA TOAMNĂ VĂ AŞTEPTĂM CU ÎNTREBĂRI DIN MATERIA DE FACULTATE.