BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 81

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 81

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Conform teoremei lui Pitagora, ipotenuza are lungimea

$$\sqrt{6^2+8^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = \boxed{10}$$

(b) Modulul vectorului $\overrightarrow{AC}$ este egal cu lungimea segmentului AC, deci cu formula uzuală este $\sqrt{(4-3)^2+(4-3)^2} = \boxed{\sqrt{2}}$.

(c) Partea reală a numărului complex $(2+3i)(3-2i) = 6-4i+9i-6i^2 = 6+5i+6 = 12+5i$ este $\boxed{12}$.

(d) Punctul de intersecţie al dreptelor d_1 şi d_2 are drept coordonate soluţia sistemului $\begin{cases} x+2y-4 & = & 0 \\ x+y-3 & = & 0 \end{cases}$. Scăzând din prima ecuaţie pe cea de a doua, obţinem $y-1=0$, de unde $y=\boxed{1}$. Substituind în a doua ecuaţie, avem $x+1-3=0$, de unde $x=\boxed{2}$. Deci punctul de intersecţie este $\boxed{(2,1)}$.

(e) Să observăm că punctele $A(3,3)$ şi $B(3,5)$ se află pe dreapta de ecuaţie $x=3$. Lungimea înălţimii din C a triunghiului ABC este distanţa de la punctul $C(4,4)$ la dreapta $AB: x-3=0$, adică $\dfrac{|4-3|}{\sqrt{1^2+0^2}} = \boxed{1}$.

(f) De exemplu, $\cos\dfrac{n\pi}{12} = \dfrac{1}{2}$ atunci când $\dfrac{n\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow n = \boxed{4}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Elementele mulţimii $\{\hat{1},\hat{3},\hat{5},\hat{7}\}$ nu pot fi soluţii deoarece membrul stâng al ecuaţii ar fi clasa unui element care este doar multiplu de 2, deci nu poate fi $\hat{4}$. Evident $\hat{0}$ nu este soluţie. Verificând elementele rămase, avem $\hat{2}\cdot\hat{2}=\hat{4}$, $\hat{2}\cdot\hat{4}=\hat{0}$, $\hat{2}\cdot\hat{6}=\hat{4}$, deci rădăcinile ecuaţiei sunt $\hat{2}$ şi $\hat{6}$. Suma lor este $\hat{2}+\hat{6}=\boxed{\hat{0}}$.

(b) Mulţimea din enunţ cu 3 elemente are $2^3=8$ submulţimi. Dintre acestea, doar una, anume $\{2,4,6\}$ nu are cel mult două elemente, deci numărul submulţimilor cu cel mult două elemente este $8-1=\boxed{7}$.

(c) Pentru $x > 0$ avem $\log_5(x+1) = \log_5(x^2+x) \Leftrightarrow x+1 = x^2+x \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \boxed{1}$. Am eliminat rădăcina $x = -1$ a ecuaţiei $x^2 = 1$ care nu satisface condiţia $x > 0$ de existenţă a logaritmilor.

(d) Deoarece $5^x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, putem împărţi ecuaţia la 5^x. Avem deci $10^x = 5^x \Leftrightarrow \frac{10^x}{5^x} = 1 \Leftrightarrow 2^x = 2^0 \Leftrightarrow x = \boxed{0}$.

(e) Deoarece $1! = 1 < 2! = 2 < 3! = 6 < 20 < 4! = 24 < 5! = 120$, condiţia este satisfăcută de 2 din cele elemente ale mulţimii, deci probabilitatea este $\boxed{\frac{2}{5}}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f'(x) = \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} = \boxed{\frac{2x}{x^2+1}}$.

(b) Cum f este o primitivă a lui f', conform teoremei Leibniz-Newton avem $\int_0^1 f'(x)\,dx = f(1) - f(0) = \ln 2 - \ln 1 = \boxed{\ln 2}$.

(c) Deoarece $x^2 + 1 \geq 0^2 = 1, \forall x \in \mathbb{R}$, folosind monotonia funcţiei $(0, \infty) \ni t \mapsto \ln t \in \mathbb{R}$, avem $f(x) = \ln(x^2+1) \geq \ln(0^2+1) = f(0),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(d) Calculăm derivata a doua:

$$f''(x) = \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)' = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2},\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$f''(x) = 0$ are rădăcinile $x = \boxed{\pm 1}$. Cum în ambele puncte $f''(x)$ are schimbare de semn, rezultă că acestea sunt puncte de inflexiune.

(e) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n \cdot (n-1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0}$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este de forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ cu $a = c = 1 > 0$ şi $b = 0 \in \mathbb{R}$, deci $I_2 \in G$.

(b) $\det M = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix} = a \cdot c - 0 \cdot b = \boxed{ac}$

(c) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G$ şi $B = \begin{pmatrix} e & f \\ 0 & g \end{pmatrix} \in G$, de unde $a, c, e, g > 0$ şi $b, f \in \mathbb{R}$. Atunci $AB = \begin{pmatrix} ae & af + bg \\ 0 & cg \end{pmatrix} \in G$, căci $ae >$, $cg > 0$ şi $af + bg \in \mathbb{R}$.

(d) Dacă $C = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G$ atunci $a, c > 0$ şi $b \in \mathbb{R}$, de unde $\frac{1}{a}, \frac{1}{c} > 0$ şi $-\frac{b}{ac} \in \mathbb{R}$, deci $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \in G$. In plus

$$CD = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot \frac{1}{a} & a \cdot \left(-\frac{b}{ac}\right) + b \cdot \frac{1}{c} \\ 0 & c \cdot \frac{1}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$DC = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \cdot a & \frac{1}{a} \cdot b - \frac{b}{ac} \cdot c \\ 0 & \frac{1}{c} \cdot c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

(e) Fie $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in G$ şi $V = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$. Avem $UV = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ şi $VU = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, deci $UV \neq VU$.

(f) Fie $a, c > 0$ şi $b \in \mathbb{R}$. Demonstrăm că egalitatea din enunţ are loc pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Verificarea pentru $n = 1$ este trivială. Presupunem că

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & b(a^{n-1} + a^{n-2}c + \ldots + ac^{n-2} + c^{n-1}) \\ 0 & c^n \end{pmatrix}$$

Atunci

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^{n+1} &= \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^n & b(a^{n-1} + a^{n-2}c + \ldots + ac^{n-2} + c^{n-1}) \\ 0 & c^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^{n+1} & a^n b + b(a^{n-1} + a^{n-2}c + \ldots + ac^{n-2} + c^{n-1})c \\ 0 & c^{n+1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^{n+1} & b(a^n + a^{n-1}c + \ldots + ac^{n-1} + c^n) \\ 0 & c^{n+1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Conform principiului inducţiei matematice, afirmaţia este valabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

(g) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$. Căutăm $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$ astfel ca $A = X^n$. Folosind punctul precedent aceasta ecuaţie se poate scrie

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^n & y(x^{n-1} + x^{n-2}z + \ldots + xz^{n-2} + z^{n-1}) \\ 0 & z^n \end{pmatrix}$$

Se vede că ecuaţia are soluţia

$$x = a^{1/n} > 0, \quad z = c^{1/n} > 0, \quad y = \frac{b}{x^{n-1} + x^{n-2}z + \ldots + xz^{n-2} + z^{n-1}} \in \mathbb{R},$$

deci există într-adevăr o soluţie $X \in G$ a ecuaţiei din enunţ. Ca fapt divers, soluţia este unică numai dacă n este impar.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f'(x) = \boxed{3^x \cdot \ln 3 - 2^x \cdot \ln 2}$.

(b) Limita este exact $f'(0) = \ln 3 - \ln 2 = \boxed{\ln \frac{3}{2}}$.

(c) Pentru $x \geq 0$ avem

$$f'(x) = 3^x \cdot \ln 3 - 2^x \cdot \ln 2 = 2^x \left[\left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \ln 3 - \ln 2\right] \geq 1 \cdot [1 \cdot \ln 3 - \ln 2] > 0$$

Rezultă că f este strict crescătoare pe $[0, \infty)$.

(d) Continuând calculul de la (a), avem

$$f''(x) \quad = \quad 3^x \cdot (\ln 3)^2 - 2^x \cdot (\ln 2)^2 = 2^x \left[\left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot (\ln 3)^2 - (\ln 2)^2\right]$$

Atunci pentru $x \geq 0$, avem $f''(x) \geq 1 \cdot [1 \cdot (\ln 3)^2 - (\ln 2)^2] > 0$, de unde rezultă că f este convexă pe $[0, \infty)$.

(e) Deoarece $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (3^x - 2^x) = 0 - 0 = 0$, graficul funcţiei f are către $-\infty$ asimptota orizontală de ecuaţie $\boxed{y = 0}$.

(f) Pentru $a > 0,\ a \neq 1$, avem $\displaystyle\int_0^x a^t\, dt = \left.\frac{a^t}{\ln a}\right|_0^x = \frac{a^x - 1}{\ln a}$.

(g) Deoarece funcţia este continuă şi pozitivă pe intervalul $[0, 1]$, aria suprafeţei din enunţ este dată de $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$. Folosind punctul precedent această integrală se poate scrie

$$\int_0^1 3^x dx - \int_0^1 2^x\, dx = \frac{3^1 - 1}{\ln 3} - \frac{2^1 - 1}{\ln 2} = \boxed{\frac{2}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 2}}$$

PRO DIDACTICA VĂ UREAZĂ SUCCES LA BAC.
DE LA TOAMNĂ VĂ AŞTEPTĂM CU ÎNTREBĂRI DIN MATERIA DE FACULTATE.