BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 80

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 80

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Cu formula uzuală (teorema lui Pitagora) distanţa este

$$|OA| = \sqrt{(0-2)^2 + (0-2)^2} = \boxed{2\sqrt{2}}$$

(b) Ecuaţia cercului cu centrul în $(0,0)$ şi raza de lungime $2\sqrt{2}$ este

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = (2\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow \boxed{x^2 + y^2 = 8}.$$

(c) Triunghiul OAB este dreptunghic isoscel cu unghiul drept în B. Atunci măsura unghiului $\widehat{OAB}$ este 45° şi $\cos\widehat{OAB} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

(d) Cum $4^2+4^2-4\cdot4-4\cdot4 = 0$, punctul $(4,4)$ aparţine cercului $x^2+y^2-4x-4y = 0$.

(e) $\left|\frac{3-4i}{5}\right| = \frac{|3-4i|}{|5|} = \frac{\sqrt{3^2+(-4)^2}}{5} = \frac{\sqrt{25}}{5} = \boxed{1}$

(f) Partea reală a numărului

$$\left(\frac{3-4i}{5}\right) = \frac{3^2-24i+(4i)^2}{25} = \frac{9-16-24i}{25} = -\frac{7}{25} - i\frac{24}{25}$$

este $\boxed{-\frac{7}{25}}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) $\frac{3}{4} * \frac{1}{2} = 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{3}{4} - 2\cdot\frac{1}{2} + 3 = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} - 1 + 3 = \boxed{\frac{5}{4}}$

(b) Să observăm mai întâi că legea este comutativă, adică $x * y = y * x$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Elementul neutru este atunci acel $e \in \mathbb{R}$, cu proprietatea $x*e = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Această egalitatea se scrie sub formele echivalente $2xe-2x-2e+3 = x \Leftrightarrow 2xe-3x-2e = 3 = 0 \Leftrightarrow x(2e-3)-(2e-3) = 0 \Leftrightarrow (2e-3)(x-1) = 0$.

Pentru ca aceasta să aibă loc pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este necesar şi suficient ca

$$2e - 3 = 0 \Leftrightarrow e = \boxed{\frac{3}{2}}.$$

(c) Fie y simetricul lui 4. Acest fapt revine la

$$4 * y = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 8y - 8 - 2y + 3 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 6y = \frac{13}{2} \Leftrightarrow y = \boxed{\frac{13}{12}}.$$

(d) $(2^x) * (4^x) = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^x \cdot 4^x - 2 \cdot 2^x - 2 \cdot 4^x + 3 = 1 \Leftrightarrow 2^x \cdot 4^x - 2^x - 4^x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2^x - 1)(4^x - 1) = 0$. Ultima egalitate are loc dacă şi numai dacă $2^x = 1$ sau $4^x = 1$. Ambele ecuaţii conduc la $x = \boxed{0}$.

(e) Să observăm că $x * y = 2(x-1)(y-1) + 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Atunci dacă luăm $x = 1 + \frac{3}{4} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ şi $y = 1 + \frac{4}{3} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, avem $x * y = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} + 1 = 3 \in \mathbb{Z}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) $f(-1) = (-1)^4 + 2(-1)^2 + (-1) + 1 = \boxed{3}$

(b) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + a = x^4 + x^2 + \frac{1}{4} + x^2 + x + \frac{1}{4} + a = x^4 + 2x^2 + x + \frac{1}{2} + a$. Deci trebuie ca $a = \boxed{\frac{1}{2}}$.

(c) Cum orice pătrat perfect este pozitiv, folosind punctul precedent, avem

$$f(x) = \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq 0 + 0 + \frac{1}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(d) Pedntru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f'(x) = \boxed{4x^3 + 4x + 1}$.

(e) $\int_0^1 f(x)\,dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 1 = \boxed{\frac{71}{30}}$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) $\det A = (-1) \cdot 2 - (-2) \cdot 1 = \boxed{0}$. Rezultă că matricea A are rangul mai mic decât 2. Cum A conţine cel puţin un element nenul, rangul său este $\boxed{1}$.

(b) Prin calcul direct

$$\begin{aligned}
A^2 &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{A} \\
B^2 &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{B} \\
AB &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2 \\
BA &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2
\end{aligned}$$

Se vede acum că $AB = BA$.

(c) Fie $x, y \in \mathbb{R}^*$. Atunci folosind punctul precedent, avem $C(x) \cdot C(y) = (xA + B)(yA + B) = xyA^2 + xAB + yBA + B^2 = xyA + B = C(xy) \in M$, căci $xy \in \mathbb{R}^*$.

(d) Fie $x, y \in \mathbb{R}$. Am văzut la punctul precedent că $C(x)C(y) = C(xy) = C(yx) = C(y)C(x)$.

(e) Să observăm că $C(1) = 1 \cdot A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$. Atunci, conform punctului (c), pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$, avem $C(x)C(\frac{1}{x}) = C(1) = I_2$. Deci $C(x)$ este inversabilă şi $(C(x))^{-1} = C(\frac{1}{x})$. În particular,

$$C(2)^{-1} = C\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}A + B = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}}.$$

(f) **Prima soluţie.** Presupunem că există o matrice $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ astfel ca

$$\begin{aligned}
AX = B \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -x-2z & -y-2t \\ x+2z & y+2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dar din această egalitate matriceală avem de exemplu, $x+2z = -1$ şi $-x-2z = 2$. Contradicţie, deci presupunerea că există asemenea matrice X este falsă.
A doua soluţie. Presupunem prin absurd că $AX = B$, unde $X \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$. Rezultă $A^2X = AB$. Folosind calculele de la punctul (b) obţinem

$$B = AX = A^2X = AB = O_2\,,$$

absurd.

(g) Am văzut la punctul (c), că $C(x)C(y) = C(xy)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Folosind repetat această proprietate, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem

$$C(x)^n = \underbrace{C(x)C(x)\ldots C(x)}_{n-ori} = C(\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n-ori}) = C(x^n)$$

Comentariu. Nu am folosit inducţia pentru că nu era nevoie. In condiţii de examen insă ar fi de preferat să faceţi ce vi se cere, deci să demonstraţi prin inducţie. La pasul de inducţie veţi folosi $C(x)^{n+1} = C(x)^n \cdot C(x) = C(x^n) \cdot C(x) = C(x^n \cdot x) = C(x^{n+1})$.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f_n'(x) = (1+x)^n + nx(1+x)^{n-1} = \boxed{(1+x)^{n-1}(1+x+nx)}$.

(b) Conform definiţiei derivatei unei funcţii într-un punct, limita este $\boxed{f_n'(-1) = 0}$ pentru $n > 1$ şi $\boxed{f_1'(-1) = -1}$, pentru $n = 1$.

(c) Conform (a), avem $f_2'(x) = (1+x)(1+3x)$. Punctele critice (adică soluţiile ecuaţiei $f_2'(x) = 0$) sunt $x_1 = -1$ şi $x_2 = -\frac{1}{3}$. Studiind semnul funcţiei de gradul doi, observăm că $f_2'(x) = \begin{cases} > 0 & , \quad x \in (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{3}, \infty\right) \\ < 0 & , \quad x \in \left(-1, -\frac{1}{3}\right) \end{cases}$. Rezultă că $x = \boxed{-1}$ este punct de maxim local, iar $x = \boxed{-\frac{1}{3}}$ este punct de minim local pentru f_2.

(d) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Pentru orice $x \in [0,1]$ avem $1 + x \geq 1$, de unde $(1+x)^n \leq (1+x)^{n+1}$. Integrând pe intervalul $[0,1]$ şi utilizând monotonia integralei, rezultă $I_n \leq I_{n+1}$. Deci şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este $\boxed{\text{crescător}}$.

(e) $\displaystyle\int_0^1 (1+x)^n\,dx = \left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \boxed{\frac{2^{n+1}-1}{n+1}}$.

(f) Folosind formula dezvoltării binomului lui Newton, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem

$$\begin{aligned} f_n(x) &= x(1+x)^n = x(C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n) \\ &= x \cdot C_n^0 + x^2 \cdot C_n^1 + x^3 \cdot C_n^2 + \ldots + x^{n+1} \cdot C_n^n \end{aligned}$$

(g) Folosind punctul (e), calculăm mai întâi

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x)\,dx &= \int_0^1 x(1+x)^n\,dx = \int_0^1 [(1+x)^{n+1} - (1+x)^n]\,dx \\ &= \frac{2^{n+2}-1}{n+2} - \frac{2^{n+1}-1}{n+1} \\ &= \frac{[2(n+1)2^{n+1} - (n+1)] - [(n+2)2^{n+1} - (n+2)]}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

Pe de altă parte, pentru orice $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ avem

$$\int_0^1 x^{k+1}\,dx = \left.\frac{x^{k+2}}{k+2}\right|_0^1 = \frac{1}{k+2}\,.$$

Nu ne mai rămâne decât să integrăm identitatea de la (f) pe intervalul $[0, 1]$; folosind calculele precedente obţinem exact indentitatea de demonstrat.

Pro Didactica vă urează succes la BAC.
De la toamnă vă aşteptăm cu întrebări din materia de facultate.