BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 7

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 7

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Distanţa dintre două puncte $A(x_A, y_A)$ şi $B(x_B, y_B)$ este dată de formula $d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$. Aplicând aceasta avem: $d(A, B) = \sqrt{(1+1)^2 + (3-2)^2} = \boxed{\sqrt{5}}$.

(b) Aria unui triunghi cu vârfurile $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ şi $C(x_C, y_C)$ este dată de formula $Aria_{ABC} = \frac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$. Deci aria triunghiului cu vârfurile $A(1, 3)$, $B(-1, 2)$ şi $C(3, 5)$ este: $Aria_{ABC} = \frac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$. Scăzând prima linie din a doua şi a treia linie şi dezvoltând după ultima coloană avem: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 2 = -2$. Astfel $Aria_{ABC} = \frac{|-2|}{2} = \boxed{1}$.

(c) Ecuaţia cercului cu centrul în $A(x_A, y_A)$ şi rază r este dată de: $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2$. Prin urmare ecuaţia cercului cu centru în $A(1, 3)$ şi rază 5 este: $\boxed{(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5^2}$, ceea ce este echivalent cu $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 - 25 = 0$ sau $\boxed{x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0}$.

(d) Funcţia sinus este funcţie impară, adică $\sin(-x) = -\sin x$. Folosind aceasta avem: $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sin 0 + \sin\frac{\pi}{2} = -\sin\frac{\pi}{2} + 0 + \sin\frac{\pi}{2} = \boxed{0}$. Putem calcula şi direct: $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sin 0 + \sin\frac{\pi}{2} = -1 + 0 + 1 = 0$.

(e) Produsul scalar este $1 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot (-1) = \boxed{0}$.

(f) Avem $(1 - 2i)^2 = 1 - 4i + (2i)^2 = 1 - 4i - 4 = -3 - 4i$. Modulul unui număr complex $z = a + bi$ este $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, prin urmare $|(1 - 2i)^2| = |-3 - 4i| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = \boxed{5}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Ecuaţia $x^2-3x+2=0$ are discriminantul $\Delta = \sqrt{(-3)^2-4\cdot 2} = 1 > 0$ şi soluţiile $x_1 = \frac{3+\sqrt{1}}{2} = \boxed{2}$ şi $x_2 = \frac{3-\sqrt{1}}{2} = \boxed{1}$.

(b) Deoarece $f(0) = 2$, $f(1) = f(2) = 0$, $f(3) = 2$, $f(4) = 6$, numărul $f(n)$ divizibil cu 3 pentru $n \in \{1, 2, 4\}$. Deci probabilitatea căutată este $\boxed{p = \frac{3}{5}}$.

(c) Folosind faptul că $f(1) = 0$ şi $f(0) = 2$, avem $(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(0) = \boxed{2}$.

(d) Conform punctului (a), soluţiile ecuaţiei $x^2 - 3x + 2 = 0$ sunt 1 şi 2. Atunci descompunerea în factori primi a lui $f(x) = x^2 - 3x + 2$ este $(x-1)(x-2)$ şi $\boxed{k = 1}$. Se poate de fapt observa direct că parametrul k este coeficientul dominant al polinomului f.

(e) Folosind faptul că $f(x) = (x-1)(x-2)$, avem

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{2}-x\right) &= \left(\frac{3}{2}-x-1\right)\left(\frac{3}{2}-x-2\right) = \left(\frac{1}{2}-x\right)\left(-\frac{1}{2}-x\right) \\ &= \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right) \\ f\left(\frac{3}{2}+x\right) &= \left(\frac{3}{2}+x-1\right)\left(\frac{3}{2}+x-2\right) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

ceea ce demostrează că $f(\frac{3}{2}-x) = (\frac{3}{2}+x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) $f'(x) = (xe^x)' = x'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = \boxed{e^x(1+x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Punctele de extrem local ale unei funcţii sunt punctele unde derivata funcţiei îşi schimbă semnul. Rezolvăm deci ecuaţia $f'(x) = 0$ echivalentă cu $e^x(1+x) = 0$. Cum $e^x > 0$, ecuaţia $e^x(1+x) = 0$ este echivalentă cu $x+1=0$, adică $x = -1$. Pentru $x < -1$, avem $f'(x) < 0$ şi pentru $x > -1$ avem $f'(x) > 0$, deci f este crescătoare pe $(-\infty, -1)$ respectiv descrescătoare pe $(-1, \infty)$. $\boxed{\text{Singurul}}$ punct de extrem este aşadar $x = -1$ (punct de minim global).

(c) Punctele de inflexiune ale graficului unei funcţii f sunt punctele în care $f''(x) = 0$ şi f'' are o schimbare de semn.
Calculăm

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))' = (e^x(x+1))' = (e^x)'(x+1) + e^x(x+1)' \\ &= e^x(x+1) + e^x = e^x(x+2). \end{aligned}$$

Rezolvăm $f''(x) = 0$ adică $e^x(x+2) = 0$. Cum $e^x > 0$, ecuaţia $e^x(x+2) = 0$ este echivalentă cu $x+2=0$, de unde $x = -2$. Să mai observăm că în $x = -2$, funcţia $f''(x)$ are o schimbare de semn. Intr-adevăr pentru $x < -2$, avem $f''(x) < 0$ şi pentru $x > -2$ avem $f''(x) > 0$.

Deci $\boxed{\text{singurul}}$ punct de inflexiune al graficului funcţiei f este $\boxed{x = -2}$.

(d) $\int_0^1 \frac{f(x)}{x} = \int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = \boxed{e-1}$.

(e) Folosind teorema lui l'Hopital (caz de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$) avem

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(e^x)'}{x'} = \lim_{x\to\infty} e^x = \boxed{\infty}$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Cum $1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{2}$ şi $1^2 - 2 \cdot 0^2 = 1$, rezultă $1 \in M$.
Presupunem că $0 \in M$. Există atunci $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel ca $a + b\sqrt{2} = 0$. In mod necesar $b = 0$, altfel $\sqrt{2} = -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, contradicţie. De aici obţinem şi $a = 0$ şi avem $a^2 - 2b^2 = 0 \neq 1$. Deci $0 \notin M$.

(b) Fie $x = a + b\sqrt{2} \in M$ şi $y = c + d\sqrt{2} \in M$. Atunci

$$xy = (a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$$

Notăm $p = ac + 2bd \in \mathbb{Z}$ şi $q = ad + bc \in \mathbb{Z}$ şi avem $xy = p + q\sqrt{2}$. Cum $p^2 - 2q^2 = (ac+2bd)^2 - 2(ad+bc)^2 = a^2c^2 + 4abcd + 4b^2c^2 - 2a^2d^2 - 4abcd - 2b^2c^2 = (a^2 - 2b^2)(c^2 - 2d^2) = 1$, rezultă că $xy \in M$.

(c) Fie $x = a + b\sqrt{2} \in M$. Atunci $x \neq 0$, căci $0 \notin M$. Să observăm că $x^{-1} = a - b\sqrt{2}$. Intr-adevăr $(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2 = 1$. Mai rămâne doar să arătăm că $x^{-1} \in M$, ceea ce se vede uşor căci $a, -b \in \mathbb{Z}$ şi $a^2 - 2(-b)^2 = a^2 - 2b^2 = 1$.

(d) Avem de verificat următoarele:
- M este parte stabilă : conform (b)
- Inmulţirea este asociativă : consecinţă a faptului că înmulţirea numerelor reale este asociativă şi $M \subset \mathbb{R}$.
- Există un element neutru: elementul neutru al înmulţirii numerelor reale $1 = 1 + 0\sqrt{2}$ este în M.
- Orice element din M este inversabil : conform (c)

(e) $x = 3 + 2\sqrt{2} \in M$ căci $3^2 - 2 \cdot 2^2 = 1$

(f) Verificarea pentru $n = 1$ este imediată: $a_1 = a \in \mathbb{N}^*$ şi $b_1 = b \in \mathbb{N}^*$. Presupunem că x^n este de forma din enunţ. Atunci $x^{n+1} = x^n \cdot x = (a_n + b_n\sqrt{2})(a + b\sqrt{2}) = (a \cdot a_n + 2b \cdot b_n) + (b \cdot a_n + a \cdot b_n)\sqrt{2}$ şi

$$a_{n+1} = a \cdot a_n + 2b \cdot b_n \in \mathbb{N}^*$$
$$b_{n+1} = b \cdot a_n + a \cdot b_n \in \mathbb{N}^*$$

Conform principiului inducţiei x^n este de forma din enunţ.

(g) Fie $x = 3 + 2\sqrt{2} \in M$. Atunci $x^n \in M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. In plus $x^{n+1} > x^n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deci M conţine mulţimea infinită $\{x^n | n \in \mathbb{N}\}$ şi implicit este infinită.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x > 0$ avem $f'(x) = 1 - \ln x - x \cdot \frac{1}{x} = \boxed{-\ln x}$.

(b) Rezolvând ecuaţia $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\ln x = 0$ găsim singurul punct critic $x = 1$. Pentru $x \in (0,1)$ avem $f'(x) > 0$ şi pentru $x > 1$ avem $f'(x) < 0$. Deci funcţia f are un maxim global în $x = 1$. Rezultă că $f(x) \leq f(1) = 0$, pentru orice $x > 0$.
Comentariu: De fapt am demonstrat mai mult şi anume că $f(x) < f(1) = 0$, pentru orice $x \in (0,1) \cup (1,\infty)$. Vom avea nevoie de acest fapt pentru punctul (g).

(c) Avem o nedeterminare de tipul $\frac{0}{0}$. Folosind regula lui l'Hopital, avem $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{2}{2x+1}}{1} = \boxed{2}$.

(d) Separând integrala într-o diferenţă de integrale şi apoi integrând prin părţi avem

$$\begin{aligned}
\int_1^e f(x)\,dx &= \int_1^e (x-1)\,dx - \int_1^e x\ln x\,dx \\
&= \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x\,dx \\
&= \frac{e^2-1}{2} - e + 1 - \frac{x^2}{2}\ln x\Bigg|_1^e + \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx \\
&= \frac{e^2-1}{2} - e + 1 - \frac{e^2}{2} + \int_1^e \frac{x}{2}\,dx \\
&= -e + \frac{1}{2} + \frac{e^2-1}{4} = \boxed{\frac{e^2-4e+1}{4}}
\end{aligned}$$

(e) Pentru orice $x > 0$ avem

$$g'(x) = \frac{\frac{2}{2x+1}\cdot x - \ln(2x+1)\cdot 1}{x^2} = \boxed{\frac{2x-(2x+1)\ln(2x+1)}{x^2(2x+1)}}$$

(f) Fie $x > 0$. Atunci conform punctului (b), $f(2x+1) = (2x+1) - 1 - (2x+1)\ln(2x+1) \leq 0$. Cum $x^2(2x+1) > 0$, rezultă că $g'(x) \leq 0$ şi de aici deducem că g este descrescătoare pe $(0,\infty)$.
Comentariu: Conform comentariului de la sfârşitul punctului (b), avem de fapt $g'(x) < 0$ pentru orice $x \in (0,1) \cup (1,\infty)$ şi în consecinţă g este strict descrescătoare pe $(0,\infty)$.

(g) Folosind comentariul de la finalul punctului precedent, avem

$$\begin{aligned}
g(\sqrt{2}) > g(\sqrt{3}) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\ln(1+2\sqrt{2})}{\sqrt{2}} > \frac{\ln(1+2\sqrt{3})}{\sqrt{3}} \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{3}\cdot\ln(1+2\sqrt{2}) > \sqrt{2}\cdot\ln(1+2\sqrt{3}) \\
&\Leftrightarrow \quad \ln(1+2\sqrt{2})^{\sqrt{3}} > \ln(1+2\sqrt{3})^{\sqrt{2}} \\
&\Leftrightarrow \quad (1+2\sqrt{2})^{\sqrt{3}} > (1+2\sqrt{3})^{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

QED.