BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 79

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 79

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Coordonatele punctului M satisfac ecuaţia, deci $a+2b-5=0$. De aici $a+2b=\boxed{5}$.

(b) Ecuaţia cercului se scrie $x^2+(y-1)^2=1^2$. De aici, raza cercului este $\boxed{1}$.

(c) Distaţa este dată de $|AB|=\sqrt{(2-5)^2+(3-7)^2}=\sqrt{9+16}=\boxed{5}$.

(d) Avem $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{2}=0$ şi $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$. Atunci produsul căutat este $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0\cdot\frac{1}{2}=\boxed{0}$.

(e) Folosind valorile de la punctul precedent, avem

$$\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{3}=\boxed{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}$$

(f) Conform formulei lui de Moivre, $(\cos\pi+i\sin\pi)^3=\cos 3\pi+i\sin 3\pi=-1+i\cdot 0=-1$. Partea reală este $\boxed{-1}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Avem $\hat{7}^{-1}=\boxed{\hat{7}}$, căci $\hat{7}\cdot\hat{7}=\hat{49}=\hat{1}$ în $\mathbb{Z}_{12}$.

(b) În $\mathbb{Z}_{10}$ grupăm convenabil termenii sumei astfel:

$$(\hat{3}+\hat{7})+(\hat{4}+\hat{6})+\hat{5}=\hat{0}+\hat{0}+\hat{5}=\boxed{\hat{5}}.$$

(c) $32^x=8\Leftrightarrow(2^5)^x=2^3\Leftrightarrow 2^{5x}=2^3\Leftrightarrow 5x=3\Leftrightarrow x=\boxed{\frac{3}{5}}$

(d) Folosim teorema lui de Moivre. Restul împărţirii la $g=X-(-1)$ este

$$f(-1)=(-1)^3-2\cdot(-1)+3=\boxed{4}.$$

(e) O pereche formată dintr-un inginer şi un maistru poate fi aleasă în $3\cdot 2=\boxed{6}$ moduri.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) $f'(x) = \boxed{\cos x - 2\sin x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

(b) Continuând calculul de la punctul (a), avem $f''(x) = -\sin x - 2\cos x,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Atunci se observă imediat că $f(x) + f''(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(c) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = (-\cos x + 2\sin x)\Big|_0^1 = \boxed{-\cos 1 + 1 + 2\sin 1}$

(d) Observăm că $-3 = -1 - 2 \le \sin x + 2\cos x \le 1 + 2 = 3,\ \forall x \in \mathbb{R}$. De aici $-\frac{3}{x} \le \frac{f(x)}{x} \le \frac{3}{x},\ \forall x > 0$. Trecând la limită şi folosind criteriul cleştelui obţinem $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \boxed{0}$. ▼[detalii]

Am folosit faptul că $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(-\frac{3}{x}\right) = 0$.

(e) Folosind în final regula lui l'Hopital (caz de nedeterminare $\frac{0}{0}$) avem

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 2\cos x}{7x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{7x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{7} = \boxed{\frac{1}{7}}.$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ avem

$$\begin{aligned} x \circ y &= 2xy - 2x - 2y + 3 = 2x(y-1) - 2y + 2 + 1 \\ &= 2x(y-1) - 2(y-1) + 1 = 2(y-1)(x-1) + 1\,. \end{aligned}$$

(b) Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$. Cum

$$\begin{aligned} (x \circ y) \circ z &= (2xy - 2x - 2y + 3) \circ z \\ &= 2(2xy - 2x - 2y + 3)z - 2(2xy - 2x - 2y + 3) - 2z + 3 \\ &= 4xyz - 4xz - 4yz - 4xy + 4x + 4y + 4z - 3 \\ x \circ (y \circ z) &= x \circ (2yz - 2y - 2z + 3) \\ &= 2x(2yz - 2y - 2z + 3) - 2x - 2(2yz - 2y - 2z + 3) + 3 \\ &= 4xyz - 4xz - 4yz - 4xy + 4x + 4y + 4z - 3 \end{aligned}$$

rezultă că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.

(c) Fie $x \in \mathbb{R}$. Avem

$$\begin{aligned} x \circ 1 &= 2x \cdot 1 - 2x - 2 \cdot 1 + 3 = 1 \\ 1 \circ x &= 2 \cdot 1 \cdot x - 2 \cdot 1 - 2x + 3 = 1 \end{aligned}$$

(d) Folosind punctul (a) ecuaţia se rescrie $2(2^x - 1)(\log_2 x - 1) = 0$. Atunci $2^x = 1 \Leftrightarrow x_1 = 0$, sau $\log_2 = 1 \Leftrightarrow x_2 = 2$. Cum x_1 nu este în $(0, \infty)$, singura soluţie este $x_2 = \boxed{0}$.

(e) Folosind punctul (g) (ca să nu calculăm acelaşi lucru de două ori) avem $x \circ x \circ x \circ x = 2^{4-1}(x-1)^4 + 1 = 8(x-1)^4 + 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Ecuaţia devine $8(x-1)^4 = 0$ cu rădăcina $x = \boxed{1}$.
Comentariu: Ca să nu aveţi probleme din cauza unui corector mai zelos, puteţi pune un comentariu că în cazul în care se cer toate rădăcinile polinomului $8(x-1)^4 = 0$ atunci $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.

(f) Este suficient să dăm un contraexemplu. Fie $a = 1 + \frac{2}{3} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ şi $b = 1 + \frac{3}{2} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. Atunci conform (a), $a \circ b = 2(a-1)(b-1) + 1 = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} + 1 = 3 \notin \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

(g) Pentru $n = 1$, avem evident $x_1 = 2^0(x_1 - 1) + 1$. Cazul $n = 2$ a fost demonstrat la punctul (a). Presupunem că pentru $\forall x_1, x_2, \ldots x_n \in \mathbb{R}$ avem

$$x_1 \circ x_2 \circ \ldots x_n = 2^{n-1}(x_1-1)(x_2-1)\ldots(x_n-1) + 1$$

Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1} \in \mathbb{R}$. Folosind asociativitatea demonstrată la punctul (b) putem pune parantezele după bunul plac şi avem

$$\begin{aligned} x_1 \circ x_2 \ldots \circ x_n \circ x_{n+1} &= (x_1 \circ x_2 \ldots \circ x_n) \circ x_{n+1} \\ &= 2[(x_1 \circ x_2 \ldots \circ x_n) - 1](x_{n+1} - 1) + 1 \\ &= 2 \cdot [2^{n-1}(x_1-1)(x_2-1)\ldots(x_n-1)](x_{n+1}-1) + 1 \\ &= 2^n(x_1-1)(x_2-1)\ldots(x_n-1)(x_{n+1}-1) + 1 \end{aligned}$$

Am folosit punctul (a) şi apoi ipoteza de inducţie. Conform principiului inducţiei afirmaţia din enunţ este demonstrată.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) $f'(x) = 1 - \frac{e}{x} = \boxed{\frac{x-e}{x}}$, $\forall x > 0$

(b) $f(e) = e - e\ln e = e - e = \boxed{0}$ şi $f'(e) = \frac{e-e}{e} = \boxed{0}$.

(c) Din $f'(x) = \frac{x-e}{x} \begin{cases} < 0, & 0 < x < e \\ > 0, & x > e \end{cases}$ rezultă că f este strict descrescătoare pe $(0, e]$ respectiv strict crescătoare pe $[e, \infty)$.

(d) Conform punctului precedent, funcţia f are un minim global în $x = e$. De aici

$$f(x) \geq f(e) = 0, \quad \forall x > 0\,.$$

(e) Folosind regula lui l'Hopital pentru un caz de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$, avem

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1 - e\frac{\ln x}{x}\right) = 1 - e\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = 1 - e\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 1 - e \cdot 0 = \boxed{1}$$

(f) Fie $x > 0$. Rescriem inegalitatea de la punctul (d):

$$f(x) \geq 0 \iff x \geq e \ln x \iff x \geq \ln x^e \iff e^x \geq e^{\ln x^e} \iff e^x \geq x^e .$$

(g) Integrăm inegalitatea de la punctul precedcent şi folosim monotonia integralei. Obţinem

$$\int_1^e x^e \, dx \leq \int_1^e e^x \, dx = e^x \Big|_1^e = e^e - e \,,$$

q.e.d.