BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 78

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 78

1. Subiectul I

Rezolvare.

(a) $|\overrightarrow{v}| = |4\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \boxed{5}$.

(b) Înălţimea căutată poate fi privită ca o catetă într-un triunghi dreptunghic isoscel de ipotenuză $2\sqrt{2}$ (un triunghi care este jumătate din cel dat). Lungimea ei este aşadar $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \boxed{2}$.

(c) $\sin\frac{\pi}{6} \cdot \cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{4}}$.

(d) Deoarece $(\sqrt{3} - i)^2 + (\sqrt{3} + i)^2 = 3 - 1 - 2i\sqrt{3} + 3 - 1 + 2i\sqrt{3} = 4$, partea reală a acestui număr complex este evident egală cu $\boxed{4}$.

(e) Cu teorema lui Pitagora (varianta în spaţiu), lungimea diagonalei paralelipipedului este $\sqrt{4^2 + 5^2 + 6^2} = \boxed{\sqrt{77}}$.

(f) Punctele $M(a, b)$ şi $N(b - 1, 3a)$ aparţin dreptei de ecuaţie $y - 2x = 0$ dacă şi numai dacă

$$\begin{cases} b - 2a = 0 \\ 3a - 2(b - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ 3a - 2b + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ 3a - 4a + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} b = 4 \\ a = 2 \end{cases}}$$

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) În corpul $\mathbb{Z}_7$ avem $\hat{5} \cdot \hat{3} = \hat{8} = \hat{1}$, cu alte cuvinte $\hat{5}^{-1} = \hat{3}$. Atunci

$$\hat{5}\hat{x} = \hat{4} \Leftrightarrow \hat{x} = \hat{3} \cdot \hat{4} = \widehat{12} = \boxed{\hat{5}}.$$

(b) Folosind teorema lui Bezout, restul împărţirii polinomului $f = X^3 - 2X + 4$ la polinomul $X + 1$ este $\boxed{r = f(-1) = 5}$.

(c) Notând cu $y = \log_2 x$ ecuaţia se rescrie $y^2 = y$, cu soluţiile $y \in \{0, 1\}$. Avem $y = 0 \Leftrightarrow \log_2 x = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 1}$ respectiv $y = 1 \Leftrightarrow \log_2 x = 1 \Leftrightarrow \boxed{x = 2}$.

(d) Notând cu $3^x = t$, ecuaţia se rescrie $t^2 = 3t$, cu soluţiile $t \in \{0, 3\}$. Ecuaţia $3^x = 0$ nu are soluţii, iar ecuaţia $3^x = 3$ are soluţia unică $\boxed{x = 1}$.

(e) O metodă eficientă de calcul a coeficienţilor binomiali este completarea triunghiului lui Pascal:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
\hline
\mathbf{1} & & \mathbf{6} & & \mathbf{15} & & \mathbf{20} & & \mathbf{15} & & \mathbf{6} & & \mathbf{1}
\end{array}$$

De aici observăm că $C_6^n < 10$ este adevărată pentru $n \in \{1, 5\}$ respectiv falsă pentru $n \in \{2, 3, 4\}$. Probabilitatea acestui eveniment este $\boxed{p = \frac{2}{5}}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Avem $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2+1} = \boxed{\frac{x^2}{x^2+1}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Cu teorema Leibnitz–Newton,

$$\int_0^1 f'(x)\,dx = f(1) - f(0) = \boxed{1 - \frac{\pi}{4}}.$$

(c) Limita din enunţ este tocmai derivata funcţiei f în $x = 0$, adică $\boxed{f'(0) = 0}$.

(d) Cu formula de la punctul (a) constatăm că $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, excepţia fiind punctul **izolat** $x = 0$. Deoarece este continuă, f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(e) Cum $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ limita este nedeterminată de tipul $\frac{\infty}{\infty}$. Folosind regula lui l'Hopital obţinem

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2(x^2+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2 + \frac{2}{x^2}} = \boxed{0}.$$

Spre sfârşit am dat factor comun forţat pe x^2 atât la numărător cât şi la numitor.

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Avem $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{O_2}$. Fără să mai facem calcule explicite obţinem si $B^2 = \boxed{O_2}$, prin transpunerea primei egalităţi, deoarece $B = A^T$.

(b) Avem $C = AB - BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq O_2$, de unde $AB \neq BA$, q.e.d.

(c) Evident $\det A = 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 = \boxed{0}$ şi pe de altă parte $\operatorname{rang} A = \boxed{1}$.

(d) Continuând calculul de la punctul (b) avem $C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{I_2}$.

(e) Cu definiţia matricii inverse, o consecinţă a punctului precedent este că $\boxed{C^{-1} = C}$.

(f) Deoarece am văzut la (d) că $C^2 = I_2$, avem

$$C = C^3 = C^5 = \ldots = C^{2007} = C$$
$$C^2 = C^4 = \ldots = C^{2006} = I_2\,,$$

de unde $C + C^2 + C^3 + \ldots + C^{2007} = 1004C + 1003I_2 = \begin{pmatrix} 2007 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Suma elementelor acestei matrici este egală cu $\boxed{2006}$.

(g) De exemplu, luăm $X = A$ şi $Y = B$. Am văzut la (a) că $AX = A^2 = O_2$ şi $BY = B^2 = O_2$, deci $AX = BY = O_2$.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Avem $f'(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x} = \boxed{-\dfrac{1}{x(x+1)}}$, $\forall x \in (0, \infty)$.

(b) Cu formula de la (a) observăm că $f'(x) < 0$, $\forall x \in (0, \infty)$. Deci f este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$.

(c) Avem

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(\ln(x+1) - \ln x) = \lim_{x\to\infty} \ln \frac{x+1}{x} = \lim_{x\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln(1+0) = \boxed{0}.$$

(d) Conform punctului precedent, limita din enunţ, scrisă sub forma $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{\frac{1}{x}}$ este nedetermintă de tipul $\dfrac{0}{0}$. Aplicăm regula lui l'Hopital şi obţinem

$$\lim_{x\to\infty} x f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x}} \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+0} = \boxed{1}.$$

(e) Integrând prin părţi obţinem

$$\begin{aligned}
\int_1^e f(x)\,dx &= xf(x)\Big|_1^e - \int_1^e xf'(x)\,dx \\
&= e[\ln(e+1)-1] - (\ln 2 - 0) - \int_1^e x\cdot\left(-\frac{1}{x(x+1)}\right)dx \\
&= e\ln(e+1) - e - \ln 2 + \int_1^e \frac{dx}{x+1} \\
&= e\ln(e+1) - e - \ln 2 + \ln(x+1)\Big|_1^e \\
&= e\ln(e+1) - 1 - \ln 2 + \ln(e+1) - \ln 2 \\
&= \boxed{(e+1)\ln(e+1) - e - 2\ln 2}.
\end{aligned}$$

(f) **S-ar putea** ca f să aibă o asimptotă verticală numai eventual în $x = 0$. E uşor de văzut că, într-adevăr, $\lim_{x\to 0^+}(\ln(x+1) - \ln x) = 0 - (-\infty) = \infty$. Ecuaţia asimptotei este evident $\boxed{x = 0}$.

(g) Introducem funcţia $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + f(x^2) + f(x^3)$. Este clar că, deoarece f este strict descrescătoare pe $(0,\infty)$, funcţia g este şi ea tot strict descrescătoare pe $(0,\infty)$. În consecinţă, g este **injectivă**. Întorcându-ne la problema noastră, ecuaţia dată se poate scrie şi $g(x) = g(1)$, de unde obţinem soluţia unică $\boxed{x = 1}$.