BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 77

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 77

1. Subiectul I

Rezolvare.

(a) Funcţia sinus este impară şi periodică de perioadă 2π. Avem

$$\sin\frac{5\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\frac{\pi}{3}=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\frac{\pi}{3}=\boxed{0}.$$

Evident, putem calcula explicit cele două cantităţi, anume $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ respectiv $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(b) Dreapta din enunţ conţine punctele A şi B dacă şi numai dacă coordonatele lor îi verifică individual ecuaţia. Obţinem sistemul:

$$\begin{cases}2a+b+5=0\\-a+2b+5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+b+5=0\\-5a-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2+b+5=0\\a=-1\end{cases}\Leftrightarrow\boxed{\begin{cases}b=-3\\a=-1\end{cases}}.$$

(c) Lungimile l şi h ale unei laturi, respectiv înălţimii unui triunghi echilateral satisfac relaţia $\frac{h}{l}=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$. În cazul de faţă avem $h=\sqrt{3}$, de unde $l=\frac{h}{\sin 60^\circ}=2$, aşadar aria triunghiului este $S=\frac{l\cdot h}{2}=\boxed{\sqrt{3}}$.

(d) $\left|(1+3i)^2\right|=|1+3i|^2=1^2+3^2=\boxed{10}$.

(e) Punctul T aparţine elipsei din enunţ, deoarece coordonatele sale îi satisfac ecuaţia: $\frac{0^2}{16}+\frac{3^2}{9}=1$. Prin dedublare, ecuaţia tangentei prin T la elipsă este

$$\frac{0\cdot x}{16}+\frac{3\cdot y}{9}=1\ \Leftrightarrow\ \boxed{y=3}.$$

(f) Fie $z=a+bi$, unde $a,b\in\mathbb{R}$. Ecuaţia dată devine

$$\sqrt{a^2+b^2}-a-bi=4-3i\ \Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}-a=4\\b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{a^2+9}=a+4\\\boxed{b=3}\end{cases}.$$

Pentru a determina necunoscuta a, punem mai întâi condiţia de existenţă $a+4\geq 0\ \Leftrightarrow\ a\geq -4$. Prin ridicare la pătrat, obţinem

$$a^2+9=a^2+8a+16\ \Leftrightarrow\ 8a=-7\ \Leftrightarrow\ \boxed{a=-\frac{7}{8}}.$$

Soluţia convine, deoarece $-\frac{7}{8}\geq -4$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Substituind $t = 2^x$, ecuaţia devine $t^2 + 2t = 8$, sau $t^2 + 2t - 8 = 0$, cu soluţiile $t \in \{-4, 2\}$. Revenind la variabila originală, ecuaţia $2^x = -4$ nu are soluţii reale, iar ecuaţia $2^x = 2$ are soluţia unică $\boxed{x = 1}$.

(b) Un număr $\overline{abcd}$ format din patru cifre distincte din mulţimea $\{1, 2, 3, 4\}$ corespunde unei permutări ale elementelor acestei mulţimi. Prin urmare există $\boxed{4! = 24}$ astfel de numere.

(c) Folosind formula binomului lui Newton, rezultă

$$C_7^0 + C_7^1 + \ldots C_7^7 = \sum_{k=0}^{7} C_7^k 1^k = (1+1)^7 = 2^7 = \boxed{128}.$$

(d) $\log_3(1 + x) = 3 \quad\Leftrightarrow\quad 1 + x = 3^3 = 2z \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{x = 26}$ care convine, fiind număr pozitiv.

(e) Numărătorul fracţiei din enunţ este suma elementelor unei progresii geometrice de raţie 3. Avem

$$\frac{3 + 3^2 + \ldots + 3^{2007}}{3^{2007} - 1} = \frac{3 \cdot \frac{3^{2007}-1}{3-1}}{3^{2007} - 1} = \boxed{\frac{3}{2}}.$$

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) $\boxed{f'(x) = 2007x^{2006}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Limita din enunţ este exact derivata funcţiei f în $x = 1$, adică $\boxed{f'(1) = 2007}$.

(c) Deoarece 2006 este par, $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$. Fiind continuă pe $\mathbb{R}$, rezultă că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, deci $\boxed{\text{nu are}}$ puncte de extrem.

(d) Avem

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x^{2007}\,dx = \left.\frac{x^{2008}}{2008}\right|_0^1 = \boxed{\frac{1}{2008}}.$$

(e) Numărătorul expresiei de sub limită este

$$\int_0^x t^{2007}\,dt = \frac{x^{2008}}{2008}.$$

Limita devine

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x^{2007}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2008} = \boxed{\infty}.$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Avem $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{O_2}$.

(b) $\det(I_2 + A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - (-2) \cdot 2 = \boxed{1}$.

(c) Fără a restrânge generalitatea vom presupune că cele trei rădăcini sunt $a - r$, a, $a + r$ cu $r \geq 0$. Folosind relaţiile lui Viète, aceste numere sunt rădăcinile polinomului f dacă şi numai dacă

$$\begin{cases} a - r + a + a + r = 3 \\ (a - r)a + a(a + r) + (a - r)(a + r) = -2m \\ (a - r)a(a + r) = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 3 \\ 3a^2 - r^2 = -2m \\ a(a^2 - r^2) = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 1 - r^2 = -8 \\ m = (r^2 - 3a^2)/2 \end{cases}$$

de unde $r = 3$ şi, în sfârşit, $\boxed{m = 3}$.

Atenţie! Puteam găsi că $m = 3$ folosind doar prima relaţie a lui Viète, din care rezultă că 1 este rădăcină a lui f, după care extrăgând valoarea lui m din egalitatea $f(1) = 0$. **Acest lucru nu garantează faptul că rădăcinile sunt în progresie aritmetică, fiind posibil ca pur şi simplu astfel de valori ale lui m să nu existe.**

(d) Continuând raţionamentul început la punctul precedent (ne aflăm exact în situaţia de acolo, unde $m = 3$), obţinem că rădăcinile polinomului dat sunt

$$\boxed{\{-2, 1, 4\}}.$$

(e) Deoarece am văzut la punctul (a) că $A^2 = 0$ rezultă

$$(I_2 + A)(I_2 + aA) = I_2 + (a + 1)A + A^2 = I_2 + (a + 1)A.$$

Atunci

$$(I_2 + A)(I_2 + aA) = I_2 \Leftrightarrow (a + 1)A = O_2 \Leftrightarrow a + 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = -1},$$

deoarece $A \neq O_2$.

(f) Deoarece $A^2 = O_2$ rezultă $A^n = O_2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Prin urmare

$$\det(I_2 + A^n) = \det I_2 = \boxed{1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

(g) **Proma soluţie.** Efectuăm împărţirea:

$$\begin{array}{l|l} X^5 & X^3 - 3X^2 - 6X + 8 \\ \cline{2-2} -X^5 + 3X^4 + 6X^3 - 8X^2 & X^2 + 3X + 15 \\ \cline{1-1} 3X^4 + 6X^3 - 8X^2 & \\ -3X^4 + 9X^3 + 18X^2 - 24X & \\ \cline{1-1} 15X^3 + 10X^2 - 24X & \\ -15X^3 + 45X^2 + 90X - 120 & \\ \cline{1-1} 55X^2 + 66X - 120 & \end{array}$$

Deci restul împărţirii celor două polinoame este $\boxed{r = 55X^2 + 66X - 120}$.

A doua soluţie. Conform teoremei împărţirii cu rest, avem $r = aX^2 + bX + c$, unde $g = f \cdot h + aX^2 + bX + c$ (h este câtul împărţirii). Să ne reamintim că la punctul (d) am determinat rădăcinile polinomului f, anume $\{-2, 1, 4\}$. Substituind pe rând aceste rădăcini în relaţia de mai sus obţinem sistemul

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = -32 \\ a + b + c = 1 \\ 16a + 4b + c = 1024 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 1 \\ -6b - 3c = -36 \\ -12b - 15c = 1008 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ -6b - 3c = -36 \\ -9c = 1080 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 55 \\ b = 66 \\ c = -120 \end{cases}$$

Prin urmare $\boxed{r = 55X^2 + 66X - 120}$.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Avem

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{6-x}} \cdot (-1) = \boxed{-\frac{1}{2\sqrt{6-x}}}, \quad \forall x \in (-\infty, 6).$$

(b) Avem de rezolvat ecuaţia $f(x) = x$, sau $\sqrt{6-x} = x$. Punând condiţiile iniţiale, obţinem $x \in [0, 6]$. Prin ridicare la pătrat, avem

$$6 - x = x^2 \;\Leftrightarrow\; x^2 + x - 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; x \in \{-3, 2\}.$$

Deoarece $x = -3$ nu convine, obţinem soluţia unică $x = 2$. Punctul de coordonate $\boxed{(2, 2)}$ este aşadar singurul punct de intersecţie al celor două curbe.

(c) Deoarece

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{6-x} = \infty,$$

funcţia nu are asimptotă orizontală. Studiem eventualitatea existenţei unei asimptote oblice. Avem

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{6-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(-\sqrt{\frac{6}{x^2} - \frac{1}{x}}\right) = 0,$$

aşadar f nu are nici asimptotă oblică (în caz contrar ultima limită ar fi trebuit să fie nenulă).

(d) Studiem semnul derivatei a doua a funcţiei f. Continuând calculele de la punctul (a), obţinem

$$f''(x) = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (6-x)^{-3/2} \cdot (-1) = -\frac{1}{4} \cdot (6-x)^{-3/2} < 0, \quad \forall x \in (-\infty, 6).$$

Deoarece este continuă pe $(-\infty, 6]$, funcţia f este concavă pe întreg domeniul de definiţie.

(e) Amplificăm primul factor al expresiei de sub limită cu conjugatul său, după care simplificăm forţat cu $\sqrt{-x}$. Atunci

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left[(f(x)-f(x-1))\cdot\sqrt{-x}\right] &= \lim_{x\to-\infty}\left[(\sqrt{6-x}-\sqrt{7-x})\cdot\sqrt{-x}\right]\\ &= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{6-x-(7-x)}{\sqrt{6-x}+\sqrt{7-x}}\cdot\sqrt{-x}\right]\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{-x}}{\sqrt{6-x}+\sqrt{7-x}}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{\frac{6}{-x}+1}+\sqrt{\frac{7}{-x}+1}}\\ &= \frac{-1}{1+1}=\boxed{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

(f) Substituind $y=6-x$, avem $dy=-dx$, sau $dx=(-1)\,dy$. Atunci

$$\int_2^5 f(x)\,dx=\int_2^5\sqrt{6-x}\,dx=\int_4^1\sqrt{y}(-1)\,dy=\int_1^4 y^{1/2}\,dy=\frac{2}{3}y^{3/2}\Big|_1^4=\boxed{\frac{14}{3}}.$$

(g) Funcţia f este strict descrescătoare pe $(-\infty,6]$. Acest fapt rezultă fie din semnul constant negativ al derivatei sale calculată mai sus, fie direct din faptul că f este compusa funcţiei strict descrescătoare $x\mapsto 6-x$ cu funcţia strict crescătoare $y\mapsto\sqrt{y}$. Prin urmare funcţia $f\circ f$ este **strict crescătoare** pe domeniul ei de definiţie $[-30,6]\supset[2,5]$. Atunci

$$(f\circ f)(2)\le(f\circ f)(x)\le(f\circ f)(5),\quad \forall x\in[2,5].$$

Rămâne doar să observăm faptul că

$$\begin{aligned}(f\circ f)(2) &= f\left(\sqrt{6-2}\right)=f(2)=\sqrt{6-2}=2\\ (f\circ f)(5) &= f\left(\sqrt{6-5}\right)=f(1)=\sqrt{6-1}=\sqrt{5}.\end{aligned}$$