BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 76

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 76

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_a)\overrightarrow{i} + (y_B - y_A)\overrightarrow{j} = (3-2)\overrightarrow{i} + (4-1)\overrightarrow{j} = \boxed{\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}}$

(b) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \boxed{\sqrt{10}}$

(c) Ecuaţia dreptei AB este $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & y-4 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \boxed{-3x + y + 5 = 0}$.

(d) Mediatoarea segmentului $[AB]$ trece prin mijlocul lui $[AB]$ şi este perpendiculară pe AB. Mijlocul M al lui $[AB]$ are coordonatele

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$$

Mediatoarea, fiind perpendiculară pe AB, va avea panta egală cu $-\dfrac{1}{m_{AB}}$, unde am notat cu m_{AB} panta lui AB. Dar $m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{4-1}{3-2} = 3$. Panta mediatoarei va fi $m = -\dfrac{1}{3}$ şi ecuaţia sa se scrie $y - y_M = m(x - x_M) \Leftrightarrow y - \frac{5}{2} = -\frac{1}{3}(x - \frac{5}{2}) \Leftrightarrow \boxed{x + 3y - 10 = 0}$.

(e) Cercul de diametru $[AB]$ are centrul în mijlocul lui $[AB]$ şi raza egală cu jumătate din lungimea segmentului $[AB]$. Am văzut la punctul anterior că mijlocul lui $[AB]$ are coordonatele $M\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$. Din punctul (b) rezultă că lungimea lui $[AB]$ este $\sqrt{10}$, deci raza cercului cerut va fi $R = \frac{\sqrt{10}}{2}$, iar ecuaţia cercului va fi atunci

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = R^2 \Leftrightarrow \boxed{\left(x - \tfrac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \tfrac{5}{2}\right)^2 = \tfrac{5}{2}}$$

(f) Ecuaţia tangentei cerute se obţine prin "dedublare", adică

$$\left(x_A - \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right) + \left(y_A - \frac{5}{2}\right)\left(y - \frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2-\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)+\left(1-\frac{5}{2}\right)\left(y-\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(x-\frac{5}{2}\right)-\frac{3}{2}\left(y-\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2} \Leftrightarrow \boxed{x+3y-5=0}$$

Observaţie : Ecuaţia tangentei cerute se putea obţine şi ţinând cont că ea este perpendiculară pe diametrul $[AB]$ deci are panta egală cu cea a mediatoarei segmentului $[AB]$, adică $-\frac{1}{3}$. Avem atunci $y-y_A=m(x-x_A) \Leftrightarrow y-1=-\frac{1}{3}(x-2) \Leftrightarrow 3y-3=-x+2 \Leftrightarrow x+3y-5=0$.

2. Subiectul II.1

Rezolvare.

(a) Notăm $2^x=t>0$. Ecuaţia devine $t^2-3t+2=0$. Discriminantul ecuaţiei este $\Delta=9-8=1$, iar soluţiile sale sunt

$$t_1=\frac{3-1}{2}=1, t_2=\frac{3+1}{2}=2$$

Pentru $t=1$ avem $x=0$, iar pentru $t=2$, $x=1$. Soluţiile sunt deci $\boxed{x_1=0,\ x_2=1}$.

(b) Încercăm să găsim x şi y raţionale şi neîntregi astfel încât $2xy+x+y=0$. Echivalent, avem

$$x+y=-2xy \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=-2$$

Putem lua $\frac{1}{x}=-5$, $\frac{1}{y}=3$ şi avem $\boxed{x=-\frac{1}{5}, y=\frac{1}{3}}$.

(c) După simplificări, ecuaţia devine

$$(n+2)(n+3)-6=0 \Leftrightarrow n^2+5n=0 \Leftrightarrow n(n+5)=0$$

Cum $n\in\mathbb{Z}, n\geq -1$, rezultă că singura soluţie este $\boxed{n=0}$.

(d) Suma dată reprezintă suma a 13 termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice în care primul termen este 2 iar ultimul 26. Suma va fi atunci egală cu $\frac{2+26}{2}\cdot 13=14\cdot 13=\boxed{182}$.

(e) Calculăm $\hat{2}\cdot x$ pentru fiecare element $x\in Z_6$: $\hat{2}\cdot\hat{0}=\hat{0}, \hat{2}\cdot\hat{1}=\hat{2}, \hat{2}\cdot\hat{2}=\hat{4}, \hat{2}\cdot\hat{3}=\hat{0}, \hat{2}\cdot\hat{4}=\hat{2}, \hat{2}\cdot\hat{5}=\hat{4}$. Soluţiile ecuaţiei date sunt $\boxed{x\in\{\hat{2},\hat{5}\}}$.

3. Subiectul II.2

Rezolvare.

(a) Pentru orice x real, avem $f'(x) = \boxed{3x^2 - 3}$.

(b) Conform definiţiei derivatei unei funcţii într-un punct, limita cerută este $f'(1) = 3 - 3 = \boxed{0}$.

(c) Înlocuind $f(2n)$ şi $f(n)$ obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(2n)}{f(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{8n^3 - 6n - 4}{n^3 - 3n - 4} = \boxed{8}$$

(d) Determinăm punctele critice : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \boxed{x = \pm 1}$. Deoarece f' schimbă semnul în aceste puncte, ele vor fi de extrem.

(e) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \left(\frac{x^4}{4} - 3\cdot\frac{x^2}{2} - 4x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} - 4 = \boxed{-\frac{21}{4}}$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Observăm că $I_3 = A(0)$, deci $I_3 \in G$.

(b) Folosind punctul precedent, avem $\det(A(0)) = \det(I_3) = 1$.

(c) Calculăm determinantul lui $A(x)$:

$$\det(A(x)) = \begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^x \end{vmatrix} = 3^x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Obţinem astfel că $A(x)$ este inversabilă pentru orice x real. În particular, $A(2)$ este inversabilă. Pentru a afla mai uşor inversa, vom rezolva mai întâi punctul (d), după care vom reveni la punctul (c).

(d) Fie $x, y \in \mathbb{R}$. Prin calcul direct

$$\begin{aligned} A(x)A(y) &= \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^x 3^y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & x+y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^{x+y} \end{pmatrix} = A(x+y) \end{aligned}$$

(c) (continuare) Conform punctului (d), $A(2)A(-2) = A(2-2) = A(0) = I_3$. Rezultă că $(A(2))^{-1} = \boxed{A(-2)}$.

(e) Bănuim că $x' = \boxed{-x}$. Să verificăm:

$$A(x)A(-x) = A(x - x) = A(0) = I_3$$

$$A(-x)A(x) = A(-x + x) = A(0) = I_3$$

Deci, într-adevăr $x' = -x$.

(f) Folosind repetat punctul (d), obţinem $A(1)A(2)...A(2007) = A(1+2+...+2007) = A\left(\frac{2007 \cdot 2008}{2}\right) = \boxed{A(2015028)}$.

(g) Fie $x \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$. Utilizând din nou punctul (d), avem

$$A^n(x) = \underbrace{A(x)A(x)...A(x)}_{n-ori} = A(\underbrace{x + x + ... + x}_{n-ori}) = A(nx)$$

5. Subiectul IV

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$, avem

$$f'(x) = \frac{(2x-5)x - (x^2-5x+4)}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2} = \boxed{1 - \frac{4}{x^2}}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int_1^e f(x)\,dx &= \int_1^e \frac{x^2-5x+4}{x}\,dx = \int_1^e \left(x - 5 + \frac{4}{x}\right)dx \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - 5x + 4\ln|x|\right)\Big|_1^e = \left(\frac{e^2}{2} - 5e + 4\right) - \left(\frac{1}{2} - 5\right) \\ &= \boxed{\frac{e^2-10e+17}{2}}\end{aligned}$$

(c) Pentru $x > 2$, avem $f'(x) = \frac{x^2-4}{x^2} > 0$, deci f este strict crescătoare pe $[2, \infty)$.

(d) Aflăm punctele critice : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \boxed{\pm 2}$. Cum f' schimbă semnul în aceste puncte, ele sunt puncte de extrem.

(e) Notăm

$$P(n) : 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Verificăm pentru prima valoare posibilă a lui n:

$$P(1) : 1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} \Leftrightarrow 1 = 1$$

Deci $P(1)$ este adevărată. Presupunem acum $P(n)$ adevărată. Atunci

$$\begin{aligned}1^2 + 2^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n+1}{6} \cdot (n(2n+1) + 6(n+1)) \\ &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\end{aligned}$$

Deci $P(n+1)$ este adevărată în ipoteza că $P(n)$ este adevărată. Cum $P(1)$ este adevărată, conform principiului inducţiei matematice, rezultă că $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \geq 1$.

(f) Ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul de abscisă $x = 1$ este $y - f(1) = f'(1)(x-1)$. Deoarece $f(1) = 0$ şi $f'(1) = -3$, ecuaţia tangentei va fi $y - 0 = -3(x-1)$, adică $\boxed{3x + y - 3 = 0}$.

(g) Deoarece $f'\left(\frac{1}{k}\right) = 1 - 4k^2$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, folosind punctul (e) vom avea

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{1}{1}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right) + \ldots + f'\left(\frac{1}{n}\right) &= n - 4(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) \\ &= n - \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{-4n^3 - 6n^2 + n}{3} \end{aligned}$$

Limita de calculat devine $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-4n^3 - 6n^2 + n}{3n^3} = \boxed{-\frac{4}{3}}$

PRO DIDACTICA VĂ UREAZĂ SUCCES LA BAC.
DE LA TOAMNĂ VĂ AŞTEPTĂM CU ÎNTREBĂRI DIN MATERIA DE FACULTATE.