BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 75

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 75

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) $|\sqrt{2}+i\sqrt{3}| = \sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2} = \boxed{\sqrt{5}}$

(b) Pentru $a \in \mathbb{R}$, partea reală a numărului complex

$$z = 1 + (a-1)(3-i) = 1 + 3(a-1) - i(a-1)$$

este $1 + 3(a-1) = 3a - 2$. Punând condiţia $3a - 2 = 4$, obţinem $a = \boxed{2}$.

(c) $\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{4}}$

(d) Punctele aparţin dreptei dacă şi numai (a, b) satisfac sistemul

$$\begin{cases} 3+b & = & 0 \\ -3a+b & = & 0 \end{cases}$$

Din prima ecuaţie obţinem $b = \boxed{-3}$. Substituind în a doua ecuaţie găsim şi $a = \boxed{-1}$.

(e) Ecuaţia cercului cu centrul în $P(1, 1)$ şi raza 2 este

$$\boxed{(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2^2}$$

(f) De exemplu, ecuaţia unei drepte paralelă cu dreapta de ecuaţie $2x-3y+5 = 0$ este $\boxed{2x - 3y = 0}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Deoarece $\hat{3}\cdot\hat{3} = \hat{1}$ în $\mathbb{Z}_8$, rezultă că $\hat{3}$ este inversabil în $\mathbb{Z}_8$ şi $\hat{3}^{-1} = \hat{3}$. Atunci $\hat{3}\cdot\hat{x} = \hat{7} \Leftrightarrow \hat{x} = \hat{3}^{-1}\cdot\hat{7} = \hat{3}\cdot\hat{7} = \boxed{\hat{5}}$.

(b) $4! - 3! = 1\cdot2\cdot3\cdot4 - 1\cdot2\cdot2\cdot3 = 24 - 6 = \boxed{18}$

(c) Folosind formula sumei primilor 10 termeni ai unei progresii geometrice, obţinem

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^9 = \frac{2^{10}-1}{2-1} = \boxed{2^{10} - 1 = 1023}.$$

(d) Deoarece $x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x-1) + (x-1) = (x-1)(x^2+1)$, ecuaţia se scrie sub forma $(x-1)(x^2+1) = 0$. Cum ecuaţia $x^2 + 1 = 0$ nu are rădăcini reale, singura soluţie a ecuaţiei este $x = \boxed{1}$.

(e) Cum $1! = 1 < 2! = 2 < 3! = 6 < 4! = 24 < 30 < 5! = 120$, observăm că 4 din cele 5 elemente ale mulţimii satisfac condiţia, deci probabilitatea este $\boxed{\frac{4}{5}}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f'(x) = \boxed{3x^2 + \cos x + 1}$.

(b)

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 (x^3 + \sin x + x)\,dx = \left(\frac{x^4}{4} - \cos x + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{4} - \cos 1 + \frac{1}{2} + 1 = \boxed{\frac{7}{4} - \cos 1}\end{aligned}$$

(c) Limita este exact $f'(0) = \boxed{2}$.

(d) Pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$, avem

$$f'(x) = \boxed{3x^2 + \cos x + 1} \geq 3x^2 - 1 + 1 > 0\,.$$

Deoarece f este continuă pe $\mathbb{R}$, iar $x = 0$ este un punct izolat în care derivata nu este strict pozitivă, rezultă că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(e) Amplificând cu conjugata, obţinem

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) &= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \boxed{0}\end{aligned}$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este de forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ cu $a = c = 1 > 0$ şi $b = 0 \in \mathbb{R}$, prin urmare $I_2 \in G$.

(b) $\det M = \begin{vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{vmatrix} = a \cdot c - 0 \cdot b = \boxed{ac}$

(c) Fie $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in G$ şi $B = \begin{pmatrix} e & 0 \\ f & g \end{pmatrix} \in G$, de unde $a, c, e, g > 0$ şi $b, f \in \mathbb{R}$. Atunci $AB = \begin{pmatrix} ae & 0 \\ be + cf & cg \end{pmatrix} \in G$, căci $ae >$, $cg > 0$ şi $af + bg \in \mathbb{R}$.

(d) Dacă $C = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in G$ atunci $a, c > 0$ şi $b \in \mathbb{R}$, de unde $\frac{1}{a}, \frac{1}{c} > 0$ şi $-\frac{b}{ac} \in \mathbb{R}$, deci $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{b}{ac} & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \in G$. In plus

$$CD = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{b}{ac} & \frac{1}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot \frac{1}{a} & 0 \\ b \cdot \frac{1}{a} + c \cdot \left(-\frac{b}{ac}\right) & c \cdot \frac{1}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$DC = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{b}{ac} & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \cdot a & 0 \\ -\frac{b}{ac} \cdot a + \frac{1}{c} \cdot b & \frac{1}{c} \cdot c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

(e) Fie $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in G$ şi $V = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in G$. Avem $UV = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ şi $VU = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, deci $UV \neq VU$.

(f) Fie $a, c > 0$ şi $b \in \mathbb{R}$. Demonstrăm că egalitatea din enunţ are loc pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Verificarea pentru $n = 1$ este trivială. Presupunem că

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ b(a^{n-1} + a^{n-2}c + \ldots + ac^{n-2} + c^{n-1}) & c^n \end{pmatrix}$$

Atunci

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}^{n+1} &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ b(a^{n-1} + a^{n-2}c + \ldots + ac^{n-2} + c^{n-1}) & c^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 \\ a^n b + b(a^{n-1} + a^{n-2}c + \ldots + ac^{n-2} + c^{n-1})c & c^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 \\ b(a^n + a^{n-1}c + \ldots + ac^{n-1} + c^n) & c^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Conform principiului inducţiei matematice, afirmaţia este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

(g) Fie $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$. Căutăm $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$ astfel ca $A = X^n$. Folosind punctul precedent aceasta ecuaţie se poate scrie

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^n & 0 \\ y(x^{n-1} + x^{n-2}z + \ldots + xz^{n-2} + z^{n-1}) & z^n \end{pmatrix}$$

Se vede că ecuaţia are soluţia

$$x = a^{1/n} > 0, \quad z = c^{1/n} > 0, \quad y = \frac{b}{x^{n-1} + x^{n-2}z + \ldots + xz^{n-2} + z^{n-1}} \in \mathbb{R},$$

deci ecuaţia originală are cel puţin o soluţie $X \in G$. Această soluţie este unică numai pentru valorile impare ale lui n.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f'(x) = \boxed{3^x \cdot \ln 3 + 2^x \cdot \ln 2}$.

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (3^x + 2^x) = 0 + 0 = 0$

(c) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $f'(x) = 3^x \cdot \ln 3 + 2^x \cdot \ln 2 > 0$. Rezultă că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(d) Continuând calculul de la (a), avem

$$f''(x) = 3^x \cdot (\ln 3)^2 + 2^x \cdot (\ln 2)^2 > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Rezultă că f este convexă pe $\mathbb{R}$.

(e) Fie F o primitivă a lui f. Cum $F'(x) = f(x) = 3^x + 2^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că F este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(f) Deoarece funcţia este continuă şi pozitivă pe intervalul $[0, 1]$, aria regiunii plane din enunţ este dată de

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)dt &= \int_0^1 (3^x + 2^x)\,dx = \left(\frac{3^x}{\ln 3} + \frac{2^x}{\ln 2}\right)\Bigg|_0^1 \\ &= \frac{3^1 - 1}{\ln 3} + \frac{2^1 - 1}{\ln 2} = \boxed{\frac{2}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 2}}\end{aligned}$$

(g) Deoarece $f(0) = 3^0 + 2^0 = 2$, observăm că ecuaţia are soluţia $x = 0$. Cum funcţia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) + f(2x) + f(3x)$ este strict crescătoare (sumă de trei funcţii strict crescătoare), rezultă că soluţia $x = \boxed{0}$ este unică.

Pro Didactica vă urează succes la BAC.
De la toamnă vă aşteptăm cu întrebări din materia de facultate.