BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 74

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 74

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Cu formula uzuală (teorema lui Pitagora) distanţa este

$$|AB| = \sqrt{(4-3)^2 + (6-5)^2} = \boxed{\sqrt{2}}$$

(b) $\overline{12 - i} = \boxed{12 + i}$

(c) Un triunghi echilateral cu perimetrul 6 are latura $\frac{6}{3} = 2$. Atunci aria este $\frac{2^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \boxed{\sqrt{3}}$.

(d) $\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\sqrt{3}}$.

(e) Coordonatele mijlocului segmentului AB sunt $\left(\frac{2+4}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = \boxed{(3,4)}$

(f) Punctul T se găseşte pe cerc, deoarece $1^2 + 1^2 = 2$. Prin dedublare, ecuaţia tangentei la cerc în T este $1 \cdot x + 1 \cdot y = 2 \Leftrightarrow \boxed{x + y = 2}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Determinantul matricei este $1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$. Inversa matricei A este atunci

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}A^* = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}.$$

(b) $\log_2 2\sqrt{2} = \log_2(2 \cdot 2^{1/2}) = \log_2 2^{3/2} = \boxed{\frac{3}{2}} \in \mathbb{Q}$.

(c) Prin verificare directă se vede că soluţiile din $\mathbb{Z}_6 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$ ale ecuaţiei $\hat{3} \cdot x = \hat{0}$ sunt $\boxed{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}}$. De altfel, deoarece $6 = 2 \cdot 3$, condiţia $\hat{3} \cdot \hat{x} = \hat{0}$ are loc dacă şi numai dacă $x \in \mathbb{Z}$ este divizibil cu 2. În inelul $\mathbb{Z}_6$, această proprietate are loc pentru cele trei clase de resturi de mai sus.

(d) Notând $x^2 = t$, obţinem $t^2 - 5t + 4 = 0$. Această ecuaţie de gradul doi are rădăcinile $t_1 = 1$ şi $t_2 = 4$. Din $x^2 = t_1 = 1$, deducem $x_1 = \boxed{1}$ şi $x_2 = \boxed{-1}$. Din $x^2 = t_2 = 4$, deducem $x_3 = \boxed{2}$ şi $x_4 = \boxed{-2}$.

(e) O mulţime cu 5 elemente are $\boxed{C_5^3 = 10}$ submulţimi de 3 elemente.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^{2006}} = \boxed{0}$

(b) Rescriem $f(x) = x^{-2006}$, $\forall x \neq 0$. Atunci $f'(x) = -2006x^{-2007} = \boxed{-\frac{2006}{x^{2007}}}$, $\forall x \neq 0$.

(c) Conform definiţiei derivatei în tr-un punct, limita este $f'(1) = \boxed{-2006}$.

(d) Deoarece f este continuă pe $\mathbb{R}^*$, singurul candidat de asimptotă verticală este $x = 0$. Cum $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^{2006}} = \frac{1}{0_+} = \infty$, dreapta verticală $\boxed{x = 1}$ este asimptotă verticală a graficului lui f. Din $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, rezultă că dreapta $\boxed{y = 0}$ este asimptotă orizontală către $-\infty$ şi de asemenea către ∞ la graficul lui f. Având asimptote orizomtale către $-\infty$ şi către ∞, graficul lui f nu mai poate avea şi asimptote oblice.

(e) Pe intervalul $(0, \infty)$, avem

$$\int f(x)\,dx = \int x^{-2006}\,dx = \boxed{-\frac{1}{2005}x^{-2005}} + C$$

unde $C \in \mathbb{R}$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Fie $x, y \in \mathbb{R}$. Atunci

$x * y - (x-5)(y-5) - 5 = (xy - 5x - 5y + 30) - (xy - 5x - 5y + 25) - 5 = \boxed{0}$.

Deducem

$$x * y = (x-5)(y-5) + 5$$

(b) Fie $x > 5, y > 5$. Atunci $x - 5 > 0$ şi $y - 5 > 0$, de unde $(x-5)(y-5) > 0$. Conform punctului precedent, $x * y > 5$, adică $x * y \in G$.

(c) Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\begin{aligned}
(x * y) * z &= (x * y - 5)(z - 5) + 5 \\
&= [(x-5)(y-5) + 5 - 5](z-5) + 5 \\
&= (x-5)(y-5)(z-5) + 5 \\
x * (y * z) &= (x-5)[y * z - 5] + 5 \\
&= (x-5)[(y-5)(z-5) + 5 - 5] + 5 \\
&= (x-5)(y-5)(z-5) + 5
\end{aligned}$$

deci $(x * y) * z = x * (y * z)$.

(d) Observăm că legea $*$ este comutativă. Căutăm $e \in \mathbb{R}$ astfel ca $x * e = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Folosind punctul (a), această relaţie este echivalentă cu

$$(x-5)(e-5)+5 = x \Leftrightarrow (x-5)(e-6) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

De aici rezultă $e = \boxed{6}$.

(e) Avem $x * x' = 6 \Leftrightarrow (x-5)(x'-5)+5 = 6 \Leftrightarrow (x-5)(x'-5) = 1$. Deci, valorile reale ale lui x pentru care există x' cu proprietatea de mai sus sunt $x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$. Pentru aceste valori avem $x' - 5 = \dfrac{1}{x-5} \Leftrightarrow x' = 5 + \dfrac{1}{x-5}$. Când ne restrângem atenţia la G, obţinem că pentru orice $x > 5$, există $x' = 5 + \dfrac{1}{x-5} > 5$ cu proprietatea cerută.

(f) **Prima soluţie.** Verificăm axiomele unui grup comutativ:

G parte stabilă pentru $*$: conform (b)

asociativitate: conform (c)

comutativitate: verificare imediată

element neutru: conform (d) acesta este 6

orice element este inversabil: conform (e)

A doua soluţie. Funcţia $\phi : (0, \infty) \to (5, \infty)$ definită prin $\phi(x) = x + 5$ este evident bijectivă. Identitatea de la punctul (a) se mai scrie sub forma

$$\phi(x \cdot y) = \phi(x) * \phi(y), \quad \forall x \in (0, \infty).$$

Deoarece $(0, \infty)$ împreună cu operaţia de înmulţire formează un grup comutativ, rezultă că şi G (care este imaginea lui ϕ) este un grup comutativ, izomorf cu $(0, \infty)$.

(g) Folosind iar (a), avem $5^x * \sqrt{5^x} = 5 \Leftrightarrow (5^x-5)(5^{x/2}-5)+5 = 5 \Leftrightarrow (5^x-5)(5^{x/2}-5) = 0$. Ecuaţia $5^x - 5 = 0$ are rădăcina $x_1 = \boxed{1}$, iar ecuaţia $5^{x/2} - 5 = 0$ are rădăcina $x_2 = \boxed{2}$.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Fie $x \in \mathbb{R}$. Aducând la acelaşi numitor, avem

$$f(x) - 1 + \frac{4x+8}{x^2 1 + 4x + 5} = \frac{x^2 - 3 - (x^2 + 4x + 5) + 4x + 8}{x^2 + 4x + 4} = \boxed{0}$$

Rezultă că $f(x) = 1 - \dfrac{4x+8}{x^2+4x+5}, \forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Folosind punctul precedent, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{4(x^2+4x+5)-(4x+8)(2x+4)}{(x^2+4x+5)^2} \\ &= \frac{-4x^2-16x-20+8x^2+32x+32}{(x^24x+5)^2} \\ &= \boxed{\frac{4(x^2+4x+3)}{(x^2+4x+5)^2}} \end{aligned}$$

(c) Ecuaţia $f'(x) = 0$ este echivalentă cu $x^2+4x+3=0$ şi are rădăcinile $x_1 = -1$ şi $x_2 = -3$. Semnul derivatei f' este dat de espresia x^2+4x+3, deci $f'(x) < 0$ pentru $x \in (-4,-1)$ şi $f'(x) > 0$ pentru $x \in (-\infty,-4) \cup (-1,\infty)$. Rezultă că $\boxed{x=-4}$ este un punct de maxim local, iar $\boxed{x=-1}$ este punct de minim local.

(d) Folosind punctul (a), observăm că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$, deci dreapta $\boxed{y=1}$ este asimptota orizontală către ∞ la graficul lui f.

(e) Observăm că avem o nedeterminare de tipul 1^∞. Vom folosi deci limita clasică $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$. Aranjând convenabil, avem atunci

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{4n+8}{n^2+4n+5}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{4n+8}{n^2+4n+5}\right)^{-\frac{n^2+4n+5}{4n+8}}\right]^{-\frac{4n^2+8n}{n^2+4n+5}} = \boxed{e^{-4}}$$

(f)

$$\int f(x)\,dx = \int\left[1-2\cdot\frac{2(x+2)}{(x+2)^2+1}\right]dx = \boxed{x-2\ln[(x+2)^2+1]+C},$$

unde $C \in \mathbb{R}$. Am folosit implicit schimbarea de variabilă $y = (x-2)^2+1$, dar numai pentru partea fracţionară de sub integrală.

(g) Folosind teorema Leibniz-Newton şi punctul precedent, avem

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \left(x-2\ln[(x+2)^2+1]\right)\Big|_0^1 = 1-2\ln 10+0+2\ln 5 = \ln e-\ln 4 = \ln\frac{e}{4}.$$

Cum $e < 3$, avem $\frac{e}{4} < 1 \Rightarrow \ln\frac{e}{4} < 0$ şi de aici $\int_0^1 f(x)\,dx < 0$.

Pro Didactica vă urează succes la BAC.
De la toamnă vă aşteptăm cu întrebări din materia de facultate.