BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 73

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 73

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Folosind faptul că $i^2 = -1$ şi $i^4 = 1$, avem

$$\begin{aligned} i^{1997} + i^{2002} + i^{2007} + i^{2012} &= (i^4)^{499} \cdot i + (i^4)^{500} \cdot i^2 + (i^4)^{501} \cdot i^3 + (i^4)^{503} \\ &= i + i^2 + i^3 + 1 = i - 1 - i + 1 = \boxed{0}. \end{aligned}$$

(b) Cu formula distanţei, avem $[AC] = \sqrt{(3-5)^2 + (6-5)^2} = \boxed{\sqrt{5}}$.

(c) Aria este $\dfrac{|\Delta|}{2}$, unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1) - 2\cdot(-2) = 5\,.$$

Deci aria triunghiului este $\boxed{\dfrac{5}{2}}$.

(d) **Prima rezolvare; valabilă pentru orice triunghi.** Determinăm mai întâi

$$\begin{aligned} [AB] &= \sqrt{(3-2)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{5} \\ [BC] &= \sqrt{(2-5)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{10} \end{aligned}$$

Exprimăm aria triunghiului ABC sub forma $\dfrac{[AB]\cdot[BC]\cdot\sin\widehat{ABC}}{2}$. Folosind punctul precedent, avem $\sin\widehat{ABC} = \dfrac{2\cdot 5/2}{[AB]\cdot[BC]} = \dfrac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$.

A doua rezolvare; funcţionează numai pentru anumite triunghiuri. Observăm că $[BC]^2 = 10 = 5 + 5 = [AC]^2 + [AB]^2$, deci conform reciprocei teoremei lui Pitagora triunghiul ABC este dreptunghic. In plus, $[AC] = [AB]$, deci avem un triunghi dreptunghic isoscel. Astfel $\widehat{ABC} = 45°$, deci $\sin\widehat{ABC} = \boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.

(e) Coordonatele punctelor B şi C trebuie să satisfacă ecuaţia dreptei, deci avem $\begin{cases} 2 + 4m + n = 0 \\ 5 + 5m + n = 0 \end{cases}$. Scăzând din a doua ecuaţie pe prima, avem $3 + m = 0$, deci $m = \boxed{-3}$. Substituind în prima ecuaţie, deducem şi $n = \boxed{10}$.

(f) Coordonatele centrului de greutate sunt media aritmetică a coordonatelor vârfurilor triunghiului, adică $\left(\frac{3+2+5}{3}, \frac{6+4+5}{3}\right) = \boxed{\left(\frac{10}{3}, 5\right)}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) $2^{3x} = 8^5 \Leftrightarrow 2^{3x} = (2^3)^5 \Leftrightarrow 3x = 3 \cdot 5 \Leftrightarrow x = \boxed{5}$

(b) Primul termen al progresiei este $a_1 = 2$, iar raţia este $r = 5$. Atunci termenul de rang 400 este $a_{400} = a_1 + (400-1)r = 2 + 399 \cdot 5 = \boxed{1997}$.

(c) Pentru prima cifră a numărului de 3 cifre, avem 3 posibilităţi, anume 1, 2 sau 5. Pentru a doua cifră, avem 3 posibilităţi, anume 0 şi cele două cifre dintre $1, 2, 5$ care nu au fost folosite pentru prima poziţie a numărului. Pentru a treia cifră a numărului au mai rămas 2 posibilităţi. Deci numărul de 3 cifre poate fi ales în $3 \cdot 3 \cdot 2 = \boxed{18}$ moduri.

(d) $(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(2007 \cdot 1 - 2006) = f(1) = 2007 \cdot 1 - 2006 = \boxed{1}$.

(e) Cum funcţia $\mathbb{N} \ni n \mapsto n! \in \mathbb{N}$ este strict crescătoare şi $4! = 24$, rezultă că singura soluţie a ecuaţiei $n! = 24$, este $n = \boxed{4}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f'(x) = \frac{(x^2+2007)'}{x^2+2007} = \boxed{\frac{2x}{x^2+2007}}$.

(b) Din definiţia derivatei într-un punct rezultă că limita este

$$f'(1) = \frac{2}{2008} = \boxed{\frac{1}{1004}}.$$

(c) Integrăm prin părţi:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 (x)' \ln(x^2+2007)\,dx \\
&= x\ln(x^2+2007)\Big|_0^1 - \int_0^1 x\frac{2x}{x^2+2007}\,dx \\
&= \ln 2008 - \int_0^1 \left(2 - \frac{4014}{x^2+2007}\right)dx \\
&= \ln 2008 - 2 + 4014\frac{1}{\sqrt{2007}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2007}}\Big|_0^1 \\
&= \boxed{\ln 2008 - 2 + 2\sqrt{2007}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2007}}}
\end{aligned}$$

(d) Avem $f'(x) = \frac{2x}{x^2+2007} \begin{cases} <0, & x \in (-\infty, 0) \\ >0, & x \in (0,\infty) \end{cases}$. Deci singurul punct de extrem al lui f este $\boxed{x=0}$, care este un punct minim global.

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{2007} f(0)}{2007 - n^{2007}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(0)}{\frac{2007}{n^{2007}} - 1} = \frac{f(0)}{0-1} = -f(0) = \boxed{-\ln 2007}$.

4. Subiectul III.

Rezolvare. Notăm $X(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$. Atunci $G = \{X(a,b), a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(a) Avem $O_2 = X(0,0) \in G$, $I_2 = X(1,0) \in G$.

(b) Fie $A = X(a,b) \in G$ şi $B = X(c,d) \in G$. Atunci

$$\begin{aligned} A \cdot B &= X(a,b)\cdot X(c,d) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+bd & ad+bc \\ bc+ad & bd+ac \end{pmatrix} \\ &= X(ac+bd, ad+bc) \in G \end{aligned}$$

căci pentru $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ avem $ac+bd, ad+bc \in \mathbb{Z}$.

(c) Identitatea din enunţ este una din proprietăţile fundamentale ale determinantului şi este valabilă pentru orice matrici pătratice A şi B. O vom demonstra, totuşi, în contextul problemei de faţă. Pentru $A = X(a,b) \in G$ şi $B = X(c,d) \in G$, conform punctului precedent avem

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \begin{vmatrix} ac+bd & ad+bc \\ bc+ad & bd+ac \end{vmatrix} \\ &= (a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2) - (a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2) \\ &= (a^2-b^2)(c^2-d^2) = (\det A)(\det B)\,. \end{aligned}$$

(d) $(x+1)^2 - (x-1)^2 = (x^2+2x+1) - (x^2-2x+1) = 4x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(e) Dacă $A \in G_1$, atunci $\det A = \pm 1 \neq 0$, deci A este inversabilă.

(f) Folosind (c) avem $1 = \det I_2 = (\det A)(\det A^{-1})$. Dar $\det A$ şi $\det A^{-1}$ sunt numere întregi, deci $\det A$ fiind divizor al lui 1 este ± 1. Astfel $|\det A| = 1$ şi $A \in G$, cu alte cuvinte $A \in G_1$.

(g) Folosim ideea de la (d). Luăm $A = \begin{pmatrix} k+1 & k-1 \\ k-1 & k+1 \end{pmatrix} \in G$ şi avem

$$\det A = (k+1)^2 - (k-1)^2 = 4k\,,$$

deci $A \in G_{4k}$.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Ecuaţia $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) = 0$ are rădăcinile $\boxed{x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3}$.

(b) Avem $g'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{(x-3)^2} < 0$, pentru orice $x \in A$.

(c) Din

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)+(x-2)(x-3) \\ &= (x-1)(x-2)(x-3)\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}\right) \\ &= f(x)g(x), \quad \forall x \in A \end{aligned}$$

rezultă exact egalitatea din enunţ.
A doua soluţie. Observăm că

$$\ln\left|f(x)\right| = \ln|x-1| + \ln|x-2| + \ln|x-3|, \quad \forall x \in A\,.$$

Derivând ambii membrii ai identităţii de mai sus obţinem exact relaţia din enunţ.
Observaţie. Membrul drept al identităţii cerute se numeşte **derivata logaritmică** şi este, de fapt, derivata funcţiei $x \mapsto \ln\left|f(x)\right|$.

(d) Derivând egalitatea de la punctul precedent, pentru orice $x \in A$, avem

$$g'(x) = \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' = \frac{f''(x)f(x) - f'(x)f'(x)}{f^2(x)} = \frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)}\,.$$

Folosind inegalitatea de la (b), cum numitorul este mereu pozitiv, rezultă că numărătorul este strict negativ, adică $(f'(x))^2 > f(x)\cdot f''(x)$, pentru orice $x \in A$.

(e) Singurele asimptote verticale posibile sunt de forma $x = a$ cu $a \in A$. Fie $a \in A$. Deoarece $\lim\limits_{x \to a_+} g(x) = \infty$, rezultă că $x = a$ este asimptotă verticală.
Deci graficul lui g are $\boxed{3}$ asimptote verticale.

(f) Avem

$$\begin{aligned} \int_4^5 (g(x+1) - g(x))\, dx &= \int_4^5 \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}\right) dx \\ &= \int_4^5 \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-3}\right) dx = (\ln|x| - \ln|x-3|)\Big|_4^5 \\ &= \boxed{\ln\frac{5}{8}}. \end{aligned}$$

(g) Deoarece $f - af'$ este un polinom de grad 3, ecuaţia $f(x) - af'(x) = 0$ are cel mult 3 rădăcini reale.
Dacă $a = 0$, atunci ecuaţia este exact cea de la punctul (a) despre care am văzut că are 3 rădăcini reale.
Fie $a \in \mathbb{R}^*$. In acest caz observăm că ecuaţia dată nu are nici una din rădăcinile 1 sau 2 sau 3 ca o consecinţă a faptului că $f(1) = f(2) = f(3) = 0$ şi $f'(1) = 2 \neq 0$, $f'(2) = -1 \neq 0$, $f'(3) = 2 \neq 0$. Atunci, folosind subpunctul (c), ecuaţia dată este echivalentă cu $g(x) = \dfrac{1}{a}$, $x \in A$.
Funcţia g este strict descrescătoare pe fiecare din intervalele $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, \infty)$. Mai mult, restricţia lui g la fiecare din intervale este o

bijecţie descrescătoare cu imaginile respectiv:

$$\begin{aligned}
(-\infty, 1) &\ni x \mapsto g(x) \in (0, -\infty) \\
(1, 2) &\ni x \mapsto g(x) \in (\infty, -\infty) \\
(2, 3) &\ni x \mapsto g(x) \in (\infty, -\infty) \\
(3, \infty) &\ni x \mapsto g(x) \in (\infty, 0)
\end{aligned}$$

Se observă că g ia orice valoare reală de exact 3 ori. Dacă $\frac{1}{a} > 0$, atunci cele 3 rădăcini sunt în intervalele $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, \infty)$, iar dacă $\frac{1}{a} < 0$, atunci cele 3 rădăcini sunt în intervalele $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$.