BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 72

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 72

1. Subiectul I

Rezolvare.

(a) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 = \boxed{1}$.

(b) $\sin^2 \frac{\pi}{2007} + \sin^2 \frac{\pi}{2007} = \boxed{1}$.

(c) $\left|\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right| = |i| = \boxed{1}$.

(d) Deoarece $10^2 = 8^2 + 6^2$, din reciproca teoremei lui Pitagora rezultă că triunghiul este dreptunghic în A. Diametrul cercului circumscris este ipotenuza triunghiului, deci raza sa este $R = \dfrac{10}{2} = \boxed{5}$.

(e) Aria triunghiului este $S = \dfrac{1}{2}|\Delta|$, unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & \alpha - 5 \end{vmatrix} = 7 - \alpha\,.$$

Punând condiţia ca aria triunghiului să fie egală cu 5 obţinem ecuaţia $\dfrac{|7-\alpha|}{2} = 5 \;\Leftrightarrow\; |7-\alpha| = 10 \;\Leftrightarrow\; \boxed{\alpha \in \{-3, 17\}}$.

(f) $\operatorname{re}[(2-i)(3+i)] = \operatorname{re}(6 + 1 - 3i + 2i) = \boxed{7}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) În $\mathbb{Z}_7$ avem $(\hat{3} + \hat{5}) \cdot \hat{3} = \hat{8} \cdot \hat{3} = \hat{1} \cdot \hat{3} = \boxed{\hat{3}}$.

(b) Suma din enunţ este suma unei progresii aritmetice cu 33 termeni, având primul termen egal cu 3 respectiv ultimul termen egal cu 99. Aşadar

$$3 + 6 + 9 + \ldots + 99 = \frac{3 + 99}{2} \cdot 33 = \boxed{1683}.$$

(c) $\log_2 x = 3 \;\Leftrightarrow\; x = 2^3 = \boxed{8}$.

(d) $x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x+1)(x^2+1) \;\Leftrightarrow\; \boxed{x = -1}$. Cel de al doilea factor nu produce rădăcini reale.

(e) Funcţia $n \mapsto 2^n + 3^n$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. Deoarece $2^3 + 3^3 = 35 < 50 < 145 = 2^4 + 3^4$ rezultă că, dintre numerele $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ inegalitatea $2^n + 3^n \geq 50$

este verificată numai pentru $n \in \{4, 5\}$. Probabilitatea acestui eveniment este $\boxed{p = \frac{2}{5}}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) $\boxed{f'(x) = 1 - \sin x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (x + \cos x)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + \sin x\right)\Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{2} + \sin 1}$.

(c) Limita din enunţ este tocmai derivata funcţiei f în $x = 0$, adică $\boxed{f'(0) = 1}$.

(d) Cu formula de la punctul (a) constatăm că $f'(x) = 1 - \sin x > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, **cu excepţia unei mulţimi de puncte izolate**. Rezultă că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(d) Avem

$$\lim_{n\to\infty}(n - \sqrt{n^2 + n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - (n^2 + n)}{n + \sqrt{n^2 + n}}$$

▼[detalii]
am amplificat cu conjugatul

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{n + \sqrt{n^2 + n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}$$

▼[detalii]
am dat factor comun forţat pe n atât la numărător cât şi la numitor

$$= \frac{-1}{1 + 1} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Pentru $a = b = 0 \in \mathbb{Z}$ obţinem $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = O_2 \in G$. Pentru $a = 1$, $b = 0$ obţinem $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = I_2 \in G$. Deoarece $I_2^{-1} = I_2 \in G$ rezultă şi faptul că $I_2 \in U(G)$.

(b) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix} \in G$. Atunci

$$A + B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ -(b + b') & a + a' \end{pmatrix} \in G\,.$$

(c) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix} \in G$. Atunci

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - bb' & ab' + ba' \\ -(ba' + ab') & -bb' + aa' \end{pmatrix} \in G\,.$$

(d) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in U(G)$. Atunci $\det A = a^2 + b^2 \in \mathbb{N}^*$ (subliniem: determinantul este număr **natural nenul**). Aceeaşi proprietate o are şi matricea $A^{-1} \in U(G)$. Deoarece $1 = (\det A) \cdot (\det A^{-1})$ în mod necesar avem $\det A = 1$. Cu alte cuvinte: singurul mod în care 1 poate fi scris ca produs de două numere naturale este $1 = 1 \cdot 1$.

(e) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in U(G)$. Continuând ideea de la punctul precedent, deoarece $1 = \det A = a^2 + b^2$, rezultă $a = 0,\ b^2 = 1$ sau $a^2 = 1,\ b = 0$. Prin urmare

$$A \in \left\{ I_2,\ -I_2,\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}\,.$$

Mulţimea de mai sus coincide cu $U(G)$. Este uşor de verificat faptul că $A^2 = \pm I_2$, de unde $A^4 = I_2$, $\forall A \in U(G)$.

(f) Folosind punctul (c) observăm că matricile din G comută două câte două. Pri urmare singurul produs posibil de patru matrici distincte din $U(G)$ este

$$I_2 \cdot (-I_2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq I_2\,.$$

Prin urmare, dacă $ABCD = I_2$, cu $A, B, C, D \in U(G)$ atunci două dintre matrici coincid, q.e.d.

(g) Fie $A, B \in G$ cu $AB = O_2$. Rezultă $0 = \det A \det B$, deci una dintre matrici are în mod necesar determinantul nul. Fără a restrânge generalitatea putem presupune că $\det A = 0$. Dar A este de forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, iar $\det A = a^2 + b^2$. În fine, $a^2 + b^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; a = b = 0 \;\Leftrightarrow\; A = O_2$, q.e.d.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Într-adevăr, $f(-x) = 2^{-x} + 2^{-(-x)} = 2^{-x} + 2^{x} = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Avem $\boxed{f'(x) = 2^x \ln 2 - 2^{-x} \ln 2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(c) Rearanjând formula de la punctul precedent, semnul derivatei funcţiei f este dat de

$$f'(x) = 2^{-x} \ln 2 \left(2^{2x} - 1\right) \begin{cases} < 0 & , x \in (-\infty, 0) \\ > 0 & , x \in (0, \infty) \end{cases}\,.$$

Prin urmare f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ respectiv strict crescătoare pe $[0, \infty)$.

(d) Deoarece $f''(x) = 2^x(\ln 2)^2 + 2^{-x}(\ln 2)^2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ rezultă că f este convexă pe $\mathbb{R}$.

(e) Funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci nu are asimptote verticale. Am văzut la punctul (a) că f este funcţie impară. Deci asimptotele către $-\infty$ sunt simetricele (faţă de originea sistemului de axe) asimptotelor către ∞. Pentru a răspunde cerinţei din enunţ este deci suficient să demonstrăm că f nu are asimptote către ∞.
Deoarece $\lim_{x\to\infty}(2^x + 2^{-x}) = \infty$, funcţia f nu are asimptotă orizontală către ∞. Folosind regula lui l'Hopital, avem şi

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^x + 2^{-x}}{x} = \lim_{x\to\infty}(2^x \ln 2 - 2^{-x}\ln 2) = \infty,$$

aşadar f nu are nici asimptotă oblică către ∞.

(f) Avem

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \left(2^t + 2^{-t}\right)dt = \left(\frac{2^t}{\ln 2} - \frac{2^{-t}}{\ln 2}\right)\Bigg|_0^x = \frac{2^x - 2^{-x}}{\ln 2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Deci

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{f(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}} = \frac{1}{\ln 2}\lim_{x\to\infty}\frac{1 - 2^{-2x}}{1 + 2^{-2x}} = \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1-0}{1+0} = \boxed{\frac{1}{\ln 2}}.$$

(g) Folosim în mod esenţial faptul că f este strict crescătoare pe $(0, \infty)$. Distingem trei cazuri.

- $x < 1$. Atunci

$$\left.\begin{array}{r} x > x^2 \\ x^{21} > x^{2007} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} f(x) > f(x^2) \\ f(x^{21}) > f(x^{2007}) \\ f(x) + f(x^{21}) > f(x^2) + f(x^{2007}) \end{array}\right. .$$

- $x > 1$. Atunci

$$\left.\begin{array}{r} x < x^2 \\ x^{21} < x^{2007} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} f(x) < f(x^2) \\ f(x^{21}) < f(x^{2007}) \\ f(x) + f(x^{21}) < f(x^2) + f(x^{2007}) \end{array}\right. .$$

- $x = 1$. Atunci

$$f(x) + f(x^{21}) = 2f(1) = f(x^2) + f(x^{2007}).$$

Am găsit soluţia unică $\boxed{x = 1}$.