BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 71

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 71

1. Subiectul I

Rezolvare.

(a) Volumul unei prisme este $V = S \cdot h$, unde h este înălţimea iar S aria bazei prismei. În cazul problemei de faţă, $h = 4$ iar $S = 3^2 = 9$, deoarece baza prismei este un pătrat de latură 3. Aşadar $\boxed{V = 36}$.

(b) Folosind una din formulele standard ale ariei unui triunghi, avem

$$S = \frac{|AB| \cdot |AC| \cdot \sin 90^\circ}{2} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 1}{2} = \boxed{3}.$$

(c) $\operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{ctg} 1 = 1 \boxed{> 0}$. De altfel, $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{k}{2}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(d) Centrul de greutate are coordonatele

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{2 + (-2) + (-3)}{3} = -1, \quad , y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{3 + 5 + (-2)}{3} = 2,$$

deci este localizat în punctul $\boxed{G(-1, 2)}$.

(e) Deoarece funcţia sinus este periodică de perioadă 2π,

$$\sin \frac{7\pi}{3} = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

(f) Fiind paralele, cele două drepte au pantele identice, adică egale cu panta dreptei $y = 2x + 1$, adică $m = 2$. Deoarece conţine punctul $(1, 1)$, ecuaţia dreptei cerute este

$$y - 1 = 2(x - 1) \iff \boxed{y = 2x - 1}.$$

2. Subiectul II.1.

Rezolvare. Deoarece ne va util mai jos, descompunem în factori polinomul f:

$$f = X^2(X-1) - (X-1) = (X-1)(X^2-1) = (X-1)(X-1)(X+1) = (X-1)^2(X+1).$$

(a) Mulţimea cu trei elemente $\{-1, 0, 1\}$ conţine două rădăcini ale polinomului f.

Probabilitatea cerută este $\boxed{p = \frac{2}{3}}$.

(b) Din descompunerea de mai sus, vedem că restul este $\boxed{0}$, iar câtul $\boxed{(x-1)^2}$.

(c) Folosind relaţiile lui Viète,

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{-1}{1} = \boxed{1}.$$

O cale alternativă (posibilă doar în cazuri particulare ca acesta) este cea directă:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 + 1 + (-1) = \boxed{1}.$$

(d) Folosind relaţiile lui Viète obţinem

$$\frac{1}{x_1 \cdot x_2} + \frac{1}{x_2 \cdot x_3} + \frac{1}{x_1 \cdot x_3} = \frac{x_3 + x_1 + x_2}{x_1 x_2 x_3} = \frac{1}{-\frac{1}{1}} = \boxed{-1}.$$

(e) Avem $f(\log_3 x) = 0 \iff \log_3 x \in \{-1, 1\}$. Ecuaţia $\log_3 x = -1$ are soluţia (pozitivă) $\boxed{x = 1/3}$ iar ecuaţia $\log_x 3 = 1$ are soluţia $\boxed{x = 3}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) $\boxed{f'(x) = 2006^x \cdot \ln 2006 + 2x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Limita din enunţ este exact derivata funcţiei f în $x = 0$, adică $\boxed{f'(0) = \ln 2006}$.

(c) Folosind formula derivatei găsită la punctul (a), constatăm că $f'(x) = 2006^x \cdot \ln 2006 + 2x > 0$, $\forall x \in (0, \infty)$, deci f, fiind evident continuă pe $\mathbb{R}$, este strict crescătoare pe $[0, \infty)$.

(d) Studiem semnul derivatei a doua a funcţiei f. Continuând calculele începute la (a), obţinem $f''(x) = 2006^x \cdot (\ln 2006)^2 + 2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Aşadar f este convexă pe $\mathbb{R}$.

(e) Aria cerută este

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left|f(x)\right| dx &= \int_0^1 \left|2006^x + x^2\right| dx = \int_0^1 2006^x + x^2\, dx = \left(\frac{2006^x}{\ln 2006} + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 \\ &= \boxed{\frac{2005}{\ln 2006} + \frac{1}{3}}.\end{aligned}$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Într-adevăr, $I_2 = A(0) \in M$, deoarece $0 > -1$.

(b) Avem $\det A(2) = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1) - 2 \cdot (-4) = \boxed{3}$.

(c) Pentru orice $x > -1$ avem

$$\det A(x) = \begin{vmatrix} 1+2x & -2x \\ x & 1-x \end{vmatrix} = (1+2x)(1-x)-x(-2x) = 1+x-2x^2+2x^2 = \boxed{1+x} > 0\,.$$

(d) Fie $x, y \in (-1, \infty)$. Atunci

$$xy + x + y = xy + x + y + 1 - 1 = \underbrace{(x+1)}_{>0}\underbrace{(y+1)}_{>0} - 1 > -1\,,$$

q.e.d.

(e) Fie x, y arbitrare astfel încât $A(x), A(y) \in M$. Atunci $x, y > -1$. Mai mult, avem

$$\begin{aligned} A(x)A(y) &= \begin{pmatrix} 1+2x & -2x \\ x & 1-x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+2y & -2y \\ y & 1-y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1+2x)(1+2y) - 2xy & (1+2x)(-2y) + (-2x)(1-y) \\ x(1+2y) + (1-x)y & x(-2y) + (1-x)(1-y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 2(xy+x+y) & -2(xy+x+y) \\ (xy+x+y) & 1-(xy+x+y) \end{pmatrix} \in M\,, \end{aligned}$$

deoarece $xy + x + y > -1$ conform punctului precedent.

(f) Conform punctului precedent, $A(x)A(x') = A(x')A(x) = A(xx' + x + x')$, iar de la punctul (a) ştim că $I_2 = A(0)$. Este suficient atunci să luăm x' soluţie a ecuaţiei $xx' + x' + x = 0$, adică $x' = -\dfrac{x}{x+1} > -1$.

(g) Vom arăta mai mult, anume că M este izomorf cu grupul multiplicativ $(0, \infty)$. Pentru aceasta este suficient să găsim o funcţie bijectivă $\phi : (0, \infty) \to M$ ce satisface proprietatea (de izomorfism):

$$\phi(x)\phi(y) = \phi(xy), \quad \forall x, y \in (0, \infty)\,.$$

Alegem $\phi(x) = A(x-1)$. Este uşor de văzut că ϕ este bijectivă, iar pe de altă parte, folosind punctul (e), avem pentru orice $x, y \in (0, \infty)$:

$$\phi(x)\phi(y) = A(x-1)A(y-1) = A\left((x-1)(y-1) + x - 1 + y - 1\right) = A(xy-1) = \phi(xy)\,.$$

Problema este rezolvată.

5. Subiectul IV.

Rezolvare. Să remarcăm mai întâi faptul că f se poate scrie şi sub forma

$$f(x) = 2 - \frac{4}{x+1}, \quad \forall x \in (0, \infty)\,.$$

(a) $\boxed{f'(x) = \dfrac{4}{(x+1)^2}}$, $\forall x \in (0, \infty)$.

(b) Folosind punctul precedent şi definiţia lui g, obţinem

$$g'(x) = \frac{4}{(x+1)^2} - \frac{1}{x} = \frac{4x - x^2 - 2x - 1}{x(x+1)^2} = \boxed{-\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}}, \quad \forall x \in (0, \infty).$$

(c) Evident, $\boxed{f(1) = g(1) = g'(1) = 0}$.

(d) Deoarece

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(2 - \frac{4}{x+1}\right) = 2 + 0 = 2,$$

asimptota către ∞ la graficul lui f are ecuaţia $\boxed{y = 2}$.

(e) Funcţia g este evident continuă pe întreg domeniul să de definiţie. Formula derivatei funcţiei g găsită la punctul (b) ne arată direct că $g'(x) < 0$, $\forall x \in (0, \infty)$ (cu excepţia punctului izolat $x = 1$), deci g este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$, nu numai pe $[1, \infty)$.

(f) Deoarece g este strict descrescătoare pe $[1, \infty)$, pentru orice $x \geq 1$ rezultă $g(x) \leq g(1) = 0$, adică $f(x) - \ln x \leq 0$, sau

$$\frac{2(x-1)}{x+1} - \ln x \leq 0 \iff \frac{2(x-1)}{x+1} \leq \ln x.$$

(g) Integrând inegalitatea din stânga obţinută la punctul precedent pe intervalul $[1, 2]$ şi utilizând proprietatea de monotonie a integralei, rezultă

$$\int_1^2 \left(\frac{2(x-1)}{x+1} - \ln x\right) dx \leq \int_1^2 0\, dx = 0.$$