BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 70

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 70

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Folosind faptul că $i^2 = -1$, avem $z = 4 + 4i - 1 = 3 + 4i$. Deci $Re(z) = \boxed{3}$.

(b) $AB = \sqrt{(9-1)^2 + (7+8)^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = \boxed{17}$

(c) Cum $AC = \sqrt{(9+6)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17 = AB$, triunghiul ABC este isoscel.

(d) Coordonatele celor două puncte verifică ecuaţia dreptei, deci

$$\begin{cases} 1 - 8m + n &= 0 \\ -6 - m + n &= 0 \end{cases}$$

Scăzând din prima ecuaţie pe a doua, vom avea $7 - 7m = 0$, deci $\boxed{m = 1}$. Substituind în prima ecuaţie obţinem $\boxed{n = 7}$.

(e) Fie M mijlocul lui $[BC]$. Atunci

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1-6}{2} = -\frac{5}{2} \\ y_M &= \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-8-1}{2} = -\frac{9}{2} \end{aligned}$$

Deci M are coordonatele $\boxed{\left(-\frac{5}{2}, -\frac{9}{2}\right)}$.

(f) Cele trei puncte sunt coliniare dacă $\Delta = \begin{vmatrix} x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_D & y_D & 1 \end{vmatrix} = 0$. Înlocuind coordonatele celor trei puncte, avem într-adevăr

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -8 & 1 \\ -6 & -1 & 1 \\ -7 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 56 - 7 - 48 = 0\,,$$

deci cele trei puncte sunt coliniare.

2. Subiectul II.1

Rezolvare.

(a) Ecuaţia se scrie, echivalent, $(3^3)^{x+1} = 3^1 \Leftrightarrow 3^{3x+3} = 3^1 \Leftrightarrow 3x+3 = 1 \Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{2}{3}}$.

(b) Suma cerută reprezintă suma a 669 de termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, primul termen fiind $3 = 3 \cdot 1$ şi ultimul $2007 = 3 \cdot 669$. Avem atunci $S = \frac{3+2007}{2} \cdot 669 = 1005 \cdot 669 = \boxed{672345}$.

(c) Un număr este divizibil cu 5 dacă şi numai dacă ultima sa cifră este 0 sau 5. Numerele de două cifre, divizibile cu 5 pe care le putem forma sunt $20, 50, 70, 25, 75$, deci în număr de $\boxed{5}$.

(d) Elementele inversabile din $\mathbb{Z}_8$ sunt $\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}, \hat{7}$, deci 4 elemente din totalul de 8. Probabilitatea cerută este atunci $\frac{4}{8} = \boxed{\frac{1}{2}}$.

(e) Ecuaţia se scrie

$$\frac{3!}{1!2!} + x \cdot \frac{4!}{3!1!} + 3 = 0 \Leftrightarrow 3 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{3}{2}}$$

3. Subiectul II.2

Rezolvare.

(a) Pentru orice x real, avem $f'(x) = \boxed{2007x^{2006}}$.

(b) Conform definiţiei derivatei unei funcţii într-un punct limita este $f'(1) = \boxed{2007}$.

(c) $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (x^{2007} - e^{2007})\,dx = \left(\frac{x^{2008}}{2008} - e^{2007}x\right)\Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{2008} - e^{2007}}$

(d) Deoarece $f'(x) = 2007x^{2006} > 0, \forall x \in \mathbb{R}^*$ rezultă că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(e) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{2007} f(0)}{f(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{-e^{2007} n^{2007}}{n^{2007} - e^{2007}} = \frac{-e^{2007}}{1} = \boxed{-e^{2007}}$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Prin calcul direct, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ avem

$$\begin{aligned} A(x)A(y) &= \begin{pmatrix} 4^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^x4^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x+y & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4^{x+y} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x+y & 1 \end{pmatrix} = A(x+y) \end{aligned}$$

(b) $\det(A(x)) = \begin{vmatrix} 4^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = 4^x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

(c) Pentru $\boxed{e = 0}$ obţinem

$$A(x)A(e) = A(x+e) = A(x+0) = A(x)$$

$$A(e)A(x) = A(e+x) = A(0+x) = A(x)$$

Putem să mai observăm că $A(0) = I_3$ şi nu mai avem nevoie de nici un fel de calcule.

(d) Fie $x \in \mathbb{R}$. Pentru $\boxed{x' = -x}$ folosind punctul (a), avem

$$A(x)A(-x) = A(x-x) = A(0)$$

$$A(-x)A(x) = A(-x+x) = A(0)$$

(e) Deoarece $B = A(1)$ şi $A(0) = I_2$, din punctul precedent obţinem că

$$B^{-1} = \boxed{A(-1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

(f) Folosind repetat punctul (a), avem $B^n = \underbrace{A(1)A(1)...A(1)}_{n-ori} = A(\underbrace{1+1+...+1}_{n-ori}) = \boxed{A(n)}$.

(g) Fie $X = \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{pmatrix} \in C(B)$. Condiţia $XB = BX$ se scrie

$$\begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4d & e+f & f \\ 4g & h+i & i \\ 4j & k+l & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4d & 4e & 4f \\ g & h & i \\ j+g & k+h & l+i \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f = 4f \Leftrightarrow f = 0 \\ e+f = 4e \Leftrightarrow e = 0 \\ 4g = g \Leftrightarrow g = 0 \\ h+i = h \Leftrightarrow i = 0 \\ 4j = g+j \Leftrightarrow j = 0 \\ k+l = k+h \Leftrightarrow l = h \end{cases}$$

Notăm $d = a, h = l = b, k = c$ şi avem $X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & b \end{pmatrix}$.

5. Subiectul IV

Rezolvare.

(a) Pentru orice x real avem $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1} - 2x = \boxed{\dfrac{-2x^3}{x^2+1}}$.

(b) Pentru $x < 0$, avem $f'(x) > 0$ şi pentru $x > 0$, $f'(x) < 0$. Deci funcţia f este strict crescătoare pe $(-\infty, 0]$ şi strict descrescătoare pe $[0, \infty)$.

(c) Din punctul precedent rezultă că $x = 0$ este punct de maxim global al funcţiei f, deci $f(x) \leq f(0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

(d) Fie $x \geq 0$. Mai întâi, integrând prin părţi, calculăm

$$\begin{aligned} J &= \int_0^x \ln(t^2+1)\,dt = \int_0^x t' \ln(t^2+1)\,dt \\ &= t \cdot \ln(t^2+1)\Big|_0^x - \int_0^x t \cdot \frac{2t}{t^2+1}\,dt \\ &= x \cdot \ln(x^2+1) - 2\int_0^x \frac{t^2}{t^2+1}\,dt \\ &= x \cdot \ln(x^2+1) - 2\int_0^x \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dt \\ &= x \cdot \ln(x^2+1) - 2(t - \operatorname{arctg} t)\Big|_0^x \\ &= x \cdot \ln(x^2+1) - 2x + 2\operatorname{arctg} x \end{aligned}$$

Atunci pentru $x \geq 0$ avem

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x [\ln(t^2+1) - t^2]\,dt \\ &= \int_0^x \ln(t^2+1)\,dt - \frac{t^3}{3}\Big|_0^x = J - \frac{x^3}{3} \\ &= \boxed{x \cdot \ln(x^2+1) + 2\operatorname{arctg} x - 2x - \tfrac{x^3}{3}} \end{aligned}$$

(e) Folosind punctul (c), avem $F'(x) = f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, deci F este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$. Rezultă că $F(x) \leq F(0) = 0, \forall x \geq 0$.

(f) $f(-x) = \ln((-x)^2 + 1) - (-x)^2 = \ln(x^2 + 1) - x^2 = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

(g) Pe intervalul $(-\infty, 0]$, funcţia f este strict crescătoare, deci injectivă. Deoarece $f(-\sqrt{e-1}) = \ln(e - 1 + 1) - (e - 1) = 2 - e$, rezultă că $x = -\sqrt{e-1}$ este soluţie unică pe intervalul $(-\infty, 0]$.

Pe intervalul $[0, \infty)$, funcţia f este strict descrescătoare, deci injectivă. Deoarece $f(\sqrt{e-1}) = \ln(e - 1 + 1) - (e - 1) = 2 - e$, rezultă că $x = \sqrt{e-1}$ este soluţie unică pe intervalul $[0, \infty)$. Soluţiile sunt deci $x = \boxed{\pm\sqrt{e-1}}$.

Pro Didactica vă urează succes la BAC.
De la toamnă vă aşteptăm cu întrebări din materia de facultate.