BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 6

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 6

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) $\left|(2+3i)^2\right| = |2+3i|^2 = 2^2+3^2 = \boxed{13}$.

(b) Mijlocul laturii AC este punctul $B'\left(\frac{3+5}{2}, \frac{2+0}{2}\right)$, adică $B'(4,1)$. Cu formula distanţei lungimea medianei BB' este

$$|BB'| = \sqrt{(-2-4)^2+(3-1)^2} = \boxed{2\sqrt{10}}$$

(c) Produsul se poate calcula fie direct, fie utilizând formula lui de Moivre. Ultima variantă este puţin mai rapidă. Deoarece $\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2\pi}{3}$ avem

$$\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3} = \boxed{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

(d) Fie h_a lungimea înălţimii din A.
Dacă suntem atenţi observăm că triunghiul dat este dreptunghic cu unghiul drept în A. Într-adevăr, avem $10^2 = 6^2+8^2$ şi afirmaţia rezultă din reciproca teoremei lui Pitagora. Atunci aria triunghiului este $S = \dfrac{8\cdot 6}{2} = 24$ şi în acelaşi timp $S = \dfrac{h_a\cdot 10}{2}$. De aici $h_a = \dfrac{2\cdot 24}{10} = \boxed{\dfrac{24}{5}}$.
Dacă suntem mai puţin atenţi avem puţin mai mult de lucru. Semiperimetrul triunghiului este $s = \dfrac{6+8+10}{2} = 12$ deci potrivit formulei lui Heron aria lui este

$$S = \sqrt{12\cdot(12-6)\cdot(12-8)\cdot(12-10)} = 24.$$

Mai avem şi $S = \dfrac{10\cdot h}{2}$, de unde, egalând cele două rezultate obţinem $\boxed{h = \dfrac{24}{5}}$.

(e) Cele trei puncte sunt colineare dacă şi numai dacă vectorii $\overrightarrow{BA} = (1, 2-\alpha)$ şi $\overrightarrow{CA} = (-1,-1)$ sunt paraleli. Mai departe, această condiţie este echivalentă cu proporţionalitatea coeficienţilor celor doi vectori. Obţinem condiţia

$$\frac{1}{-1} = \frac{2-\alpha}{-1} \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

(f) Observăm că punctul $P(0,-3)$ de află pe cercul dat. Într-adevăr, $0^2+(-3)^2 = 9$. Atunci ecuaţia tangentei în P la cerc o obţinem direct prin dedublare:

$$0 \cdot x + (-3) \cdot y = 9 \;\Leftrightarrow\; \boxed{y = -3}$$

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Ecuaţia se scrie sub formele echivalente succesive

$$\hat{2}x + \hat{4} = \hat{3} \;\Leftrightarrow\; \hat{2}x = -\hat{1} \;\Leftrightarrow\; \hat{2}x = \hat{4} \;\Leftrightarrow\; x = \widehat{12} = \boxed{\hat{2}}.$$

Am folosit faptul că în $\mathbb{Z}_5$ avem $\hat{2}^{-1} = \hat{3}$.

(b) Soluţia simplă foloseşte formula binomului lui Newton. Observăm că

$$(1+1)^4 = C_4^0 + C_4^1 \cdot 1 + C_4^2 1^2 + C_4^3 \cdot 1^3 + C_4^4 \cdot 1^4 = E,$$

deci $\boxed{E = 16}$.

(c) Folosind proprietăţile de bază ale logaritmilor avem

$$\log_3 2 + \log_3 12 - \log_3 8 = \log_3 \frac{2 \cdot 12}{8} = \log_3 3 = \boxed{1}$$

(d) Avem $\sqrt{x+1} = 3 \;\Rightarrow\; x+1 = 9 \;\Leftrightarrow\; \boxed{x = 8}$. Reamintim faptul că, până când nu verificăm ecuaţia originală pentru fiecare candidat la soluţie, rezolvarea problemei nu este terminată. În cazul de faţă, e clar că $x = 8$ este soluţie a ecuaţiei din enunţ.

(e) Inegalitatea $3^n < 10$ este verificată numai de către două valori din cinci (anume pentru $n \in \{1, 2\}$). Probabilitatea cerută este $\boxed{p = \frac{2}{5}}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) $f'(x) = 5x^4 + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b)

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (x^5 + x - 1)\,dx = \left(\frac{x^6}{6} + \frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_0^1 = \boxed{-\frac{1}{3}}$$

(c) Remarcăm că limita cerută este tocmai derivata funcţiei f în $x = 0$. Folosind formula derivatei lui f calculată la punctul (a) obţinem $\boxed{f'(0) = 1}$.

(d) Deoarece $f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ rezultă că f este într-adevăr crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(e) Fie $c \in \mathbb{R}$ un număr arbitrar. Avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{12n^2 + c}{5n^2 - c} = \lim_{n\to\infty} \frac{12 + \frac{c}{n^2}}{5 - \frac{c}{n^2}} = \frac{12+0}{5-0} = \boxed{\frac{12}{5}}.$$

4. Subiectul III

Rezolvare.

(a) Adunarea a două matrici se face element cu element (ştim că ştiţi). Este clar ca lumina zilei că $A + I_2 = B$.

(b) În primul rând $\det B = \boxed{2}$. Atunci rangul lui B coincide cu dimensiunea lui B, deci este egal cu $\boxed{2}$.

(c) Calcul direct:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A\ .$$

(d) Folosind punctul precedent demonstrăm prin inducţie după n că $A^n = A$. Propoziţia de demonstrat este trivială pentru $n = 1$ şi a fost tocmai demonstrată mai sus la punctul (c) pentru $n = 2$. Presupunând că $A^n = A$ pentru un număr natural $n \geq 2$, rezultă $A^{n+1} = A^n \cdot A = A \cdot A = A^2 = A$, q.e.d.
In particular $A^{2007} = \boxed{A}$.

(e) Propoziţia este adevărată pentru $n = 1$, deoarece în acest caz $I_2 + (2-1)A = B$. Presupunem că $B^n = I_2 + (2^n - 1)A$ pentru un număr natural $n \geq 1$. Folosind şi formula de la (a) obţinem

$$\begin{aligned} B^{n+1} &= B \cdot B^n = (I_2 + A)\left[I_2 + (2^n - 1)A\right] \\ &= I_2 + (2^n - 1)A + A + (2^n - 1)A^2 \\ &= I_2 + (2^n + 2^n - 1)A = I_2 + (2^{n+1} - 1)A, \end{aligned}$$

q.e.d.

(f) Examinând membrul stâng remarcăm că

$$aA + bB + cI_2 = \begin{pmatrix} b + c & a + b \\ 0 & a + 2b + c \end{pmatrix}.$$

Coeficientul din poziţia $(2, 1)$ al acestor matrici este întotdeauna egal cu zero, pe când coeficientul corespunzător al lui C este egal cu 3. Aşadar egalitatea de matrici este imposibilă.

(g) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Combinând egalitatea $A^n = A$ demonstrată în cursul lui (c) şi formula de la (e) rezultă

$$A^n + B^n = A + I_2 + (2^n - 1)A = I_2 + 2^n A = \begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ 0 & 1 + 2^n \end{pmatrix}.$$

Determinantul matricii de mai sus este $2^n + 1 \neq 0$, deci matricea $A^n + B^n$ este într-adevăr inversabilă.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) $f'(x) = \boxed{-2x \cdot 2^{1-x^2} \cdot \ln 2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Fie $x \in [1, 2]$ arbitrar. Observăm că

$$(x-1)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) = \frac{(x-1)(2-x)}{2x}.$$

Numitorul fracţiei $\dfrac{(x-1)(2-x)}{2x}$ este în mod clar pozitiv. Dar numărătorul? Şi numărătorul, deoarece este produsul a doi factori pozitivi (reaminitim că $x \in [1, 2]$).

(c) Dezvoltăm produsul din inegalitatea de la punctul precedent:

$$1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \geq 0, \quad \forall x \in [1, 2].$$

Ultima inegalitate este evident echivalentă cu inegalitatea din enunţ.

(d) Fie $x \in [0, 1]$. Atunci $1-x^2 \in [0, 1]$ şi prin urmare $f(x) = 2^{1-x^2} \in [1, 2]$ (deoarece funcţia $t \mapsto 2^t$ este crescătoare, $2^0 = 1$ şi $2^1 = 2$). Înlocuind x cu $f(x)$ în inegalitatea de la (c) obţinem exact ceea ce trebuia demonstrat.

(e) Avem

$$\begin{aligned}(u+v)^2 \geq 4uv \quad &\Leftrightarrow \quad u^2 + 2uv + v^2 \geq 4uv \\ &\Leftrightarrow \quad u^2 - 2uv + v^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (u-v)^2 \geq 0,\end{aligned}$$

q.e.d.

(f) Integrând inegalitatea de la (d) obţinem

$$\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx + \int_0^1 \frac{f(x)}{2}\,dx \leq \int_0^1 \frac{3}{2}\,dx = \frac{3}{2}\,.$$

(g) Introducem notaţiile

$$u = \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx, \quad v = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{f(x)}{2}\,dx\,.$$

Din (f) rezultă $\dfrac{3}{2} \geq u + v$. Deoarece $u + v \geq 0$, prin ridicare la pătrat şi combinând cu inegalitatea de la (e), obţinem

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 \geq (u+v)^2 \geq 4uv,$$

adică

$$\frac{9}{4} \geq 4 \cdot \left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right),$$

q.e.d.