BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 69

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 69

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) $|(3+i)^4| = |3+i|^4 = \left(\sqrt{3^2+1^2}\right)^4 = (9+1)^2 = \boxed{100}$

(b) Pentru $a \in (0, \frac{\pi}{2})$, avem $\sin a > 0$. Atunci, folosind formula fundamentală a trigonometriei

$$\sin a = \sqrt{1-\cos^2 a} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \boxed{\frac{4}{5}}$$

(c) Folosind formula lui de Moivre, avem

$$(\cos\pi + i\sin\pi)^{10} = \cos 10\pi + i\sin 10\pi = 1$$

Deci, partea reală este $\boxed{1}$.

(d) Fie θ unghiul format de vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$. Atunci

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{3\cdot 4 + (-2)\cdot 6}{\sqrt{3^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{4^2+6^2}} = \frac{0}{\star} = 0$$

Rezultă că măsura unghiului θ dintre cei doi vectori este $\boxed{90^\circ}$.

(e) Conform teoremei cosinus

$$\cos B = \frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC} = \frac{10^2+12^2-10^2}{2\cdot 10\cdot 12} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

(f) Coordonatele (x,y) punctelor de intersecţie sunt soluţiile sistemului

$$\begin{cases} x^2+y^2 &= 8 \\ x+y &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 &= 8 \\ y &= -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 &= 8 \\ y &= -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= \pm 2 \\ y &= \mp 2 \end{cases}$$

Deci cercul şi dreapta din enunţ se intersectează în $\boxed{\text{două}}$ puncte, anume $(2,-2)$ şi $(-2,2)$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) $(x-1)^2 + (x-y+3)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 &= 0 \\ x-y+3 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x &= 1 \\ y &= 4 \end{cases}}$

(b) Deoarece $\Delta = (a+2)^2 - 4\cdot 2a = (a-2)^2 \geq 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$, ecuaţia de gradul doi are rădăcini reale.
(c) $\log_3 9^5 = \log_3 [(3^2)^5] = \log_3 3^{10} = \boxed{10}$
(d) $\sqrt{x} \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 4^2 \Leftrightarrow x \in \boxed{[16, \infty)}$
(e) Verificăm succesiv : $2^1 + 1^2 = 2 \leq 10$, $2^2 + 2^2 = 8 \leq 10$, $2^3 + 3^2 = 17 > 10$. Cum funcţia $\mathbb{N} \ni n \mapsto f(n) = 2^n + n^2 \in \mathbb{N}$ este strict crescătoare rezultă că $f(5) > f(4) > 10$. Cum 3 din cele 5 elemente ale mulţimii satisfac inegalitatea, probabilitatea este $\boxed{\frac{3}{5}}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.
(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f'(x) = \boxed{e^x + \cos x + 1}$.
(b)

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 (e^x + \sin x + x)\,dx = \left(e^x - \cos x + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 \\ &= \left(e^1 - \cos 1 + \frac{1}{2}\right) - (e^0 - \cos 0 + 0) = \boxed{e - \cos 1 + \tfrac{1}{2}}\end{aligned}$$

(c) Limita este $f'(0) = e^0 + \cos 0 + 1 = \boxed{3}$.
(d) Deoarece $f(x) = e^x + (\cos x + 1) \geq e^x + (-1+1) > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, funcţia f este strict crescătoare.
(e) Să observăm că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{e^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos n}{e^n} = 0$, deoarece la numărător avem funcţii mărginite, iar la numitor o funcţie ce tinde la ∞. De asemenea, folosind regula lui l'Hopital avem $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{f(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n + \cos n + 1}{e^n + \sin n + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{\cos n}{e^n} + \frac{1}{e^n}}{1 + \frac{\sin n}{e^n} + \frac{n}{e^n}} = \frac{1+0+0}{1+0+0} = \boxed{1}$$

4. Subiectul III.

Rezolvare. Pentru simplitatea scrierii vom nota $X(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$. Observăm că $G = \{X(a,b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.
(a) Avem $O_2 = X(0,0) \in G$ şi $I_2 = X(1,0) \in G$.
(b) Fie $A = X(a,b) \in G$ şi $B = X(c,d) \in G$. Atunci

$$\begin{aligned} AB &= X(a,b)X(c,d) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+bd & ad+bc \\ ad+bc & ac+bd \end{pmatrix} \\ &= X(ac+bd, ad+bc) \in G \end{aligned}$$

Am folosit faptul că $ac + bd, ad + bc \in \mathbb{Z}$.

(c) Cu notatiile de la punctul precedent,

$$A + B = X(a, b) + X(c, d) = X(a + c, b + d) \in G$$

Am folosit faptul că $a + c, b + d \in \mathbb{Z}$.

(d) Presupunem că există $X \in G$, astfel ca $\det X = 2$. Atunci există $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel ca $X = X(a, b)$ şi avem $\det X = a^2 - b^2 = 2$. Egalitatea aceasta se mai poate scrie $(a - b)(a + b) = 2$. Singurele moduri în care 2 se poate scrie ca produs de numere întregi sunt $2 = 1 \cdot 2$ şi $2 = (-1) \cdot (-2)$. În primul caz obţinem $2a = (a - b) + (a + b) = 1 + 2 = 3$. Contradicţie! Similar, în celălalt caz, avem $2a = (a - b) + (a + b) = (-1) + (-2) = -3$. Contradicţiile obţinute, demonstrează că presupunerea făcută este falsă.

(e) De exemplu, fie $C = D = -I_2 = \boxed{X(-1, 0)} \in G$. Atunci $CD = I_2$.

(f) Fie de exemplu, $P = \boxed{X(1, 1)} \in G$ şi $Q = \boxed{X(-1, 1)} \in G$. Atunci, conform (b), avem $PQ = X(1, 1)X(-1, 1) = X(0, 0) = O_2$.

(g) Căutam $M = X(a, b)$ astfel ca $\det M = a^2 - b^2 = 2007$. Egalitatea precedentă se poate scrie $(a - b)(a + b) = 2007 = 3 \cdot 669$. Putem lua de exemplu $a - b = 3,\ a + b = 669 \Leftrightarrow a = 336,\ b = 333$. Astfel $M = \boxed{X(336, 333)}$ satisface condiţia.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $f'(x) = \dfrac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}} - 1 = \boxed{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1}$.

(b) Amplificând cu conjugata avem

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = \boxed{0}$$

(c) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x > \sqrt{x^2} - x = |x| - x \geq 0$. In concluzie, $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

(d) Continuând calculul de la punctul (a), pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = -\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Folosind punctul precedent, deducem $f'(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

(e) Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty-(-\infty) = \infty$, graficul lui f nu are asimptotă orizontală către $-\infty$. Căutăm asimptotă oblică de forma $y = mx + n$. Avem

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} - 1 \right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{-\sqrt{x^2}} - 1 \right) = -2 \\
n &= \lim_{x\to-\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to-\infty} [\sqrt{x^2+1} - x + 2x] \\
&= \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+1} + x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} = 0
\end{aligned}$$

Deci graficul lui f are către $-\infty$ asimptota oblică $\boxed{y = -2x}$.

(f) Continuând calculul de la (a), avem

$$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0\,, \forall x \in \mathbb{R}$$

Rezultă că f este convexă pe $\mathbb{R}$.

(g) Calculăm separat

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx &= \int_0^1 x'\sqrt{x^2+1}\,dx = x\sqrt{x^2+1}\Big|_0^1 - \int_0^1 x(\sqrt{x^2+1})'\,dx \\
&= \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}} \\
&= \sqrt{2} - \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx \\
&= \sqrt{2} + \ln(x + \sqrt{x^2+1})\Big|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx \\
&= \sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}) - \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx
\end{aligned}$$

Privind la capetele şirului de egalităţi, deducem

$$\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})}{2}$$

Atunci

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx - \int_0^1 x\,dx = \boxed{\frac{\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}) - 1}{2}}$$

PRO DIDACTICA VĂ UREAZĂ SUCCES LA BAC.
DE LA TOAMNĂ VĂ AŞTEPTĂM CU ÎNTREBĂRI DIN MATERIA DE FACULTATE.