BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 68

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 68

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Cu formula uzuală (teorema lui Pitagora), distanţa între punctele $A_2(2,0)$ şi $B_2(0,2)$ este $\sqrt{(0-2)^2+(2-0)^2} = \boxed{2\sqrt{2}}$.

(b) Ecuaţia dreptei ce trece prin punctele $A_1(1,0)$ şi $B_3(0,3)$ este $\dfrac{y-0}{3-0} = \dfrac{x-1}{0-1}$, sau $\boxed{y+3x-3=0}$.

(c) Conform punctului precedent, panta dreptei A_1B_3 este -3. Ecuaţia dreptei ce trece prin $B_1(0,1)$ şi are panta -1 este $y-1=(-3)\cdot(x-0)$, sau $\boxed{y+3x-1=0}$.

(d) **Prima soluţie.** Ara cerută este $S=\frac{|\Delta|}{2}$, unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 12\,.$$

Aşadar $S=\boxed{6}$.
A doua soluţie. Piciorul înălţimii din B_4 pe A_1A_4 este originea $O(0,0)$, deci lungimea înălţimii este 4. Cum Baza A_1A_4 are lungimea 3, aria este $\dfrac{3\cdot 4}{2} = \boxed{6}$.

(e) Cum $\widehat{A_1A_2B_2} = \widehat{OA_2B_2} = 45^\circ$, avem $\sin\widehat{A_1A_2B_2} = \boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.

(f) Oricare două din dreptele A_n determină aceaşi dreptă şi anume axa Ox, iar oricare două din punctele B_n determină axa Oy. Pe de altă parte, orice pereche A_nB_m determină câte o dreaptă, diferită de fiecare dintre axe. Cum putem alege perechile (n,m) în $4\cdot 4=16$ moduri, rezultă că punctele din M determină $1+1+16=\boxed{18}$ drepte.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Cum $3, a, 4$ sunt în progresie aritmetică, rezultă că $a = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2}$. La fel, din faptul că $4, b, 5$ sunt în progresie aritmetică, rezultă că $b = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2}$. Atunci $a + b = \frac{7}{2} + \frac{9}{2} = \boxed{8}$.

(b) Avem $\frac{(c+4)!}{(c+3)!} = 5 \Leftrightarrow \frac{(c+3)! \cdot (c+4)}{(c+3)!} = 5 \Leftrightarrow c + 4 = 5 \Leftrightarrow c = \boxed{1}$.

(c) Cum $\mathbb{Z}_5$ este corp şi $\hat{3} \neq \hat{0}$, ecuaţia de gradul întâi are exact $\boxed{1}$ soluţie. Nu ni s-a cerut, dar putem afla această soluţie înmulţind cu inversul $\hat{2}$ al lui $\hat{3}$. Obţinem $x = \hat{2} \cdot \hat{4} = \hat{3}$.

(d) Valorile lui $f(1)$ pot fi alese în 3 moduri, ale lui $f(2)$ tot în 3 moduri, iar ale lui $f(3)$ doar în 2 moduri (poate lua numai valorile 3 sau 5). Deci funcţia f poate fi aleasă în $3 \cdot 3 \cdot 2 = \boxed{18}$ moduri.

(e) O submulţime de cinci persoane dintr-o mulţime de opt persoane poate fi aleasă în $C_8^5 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot \cdot 2 \cdot 3} = \boxed{56}$ moduri distincte.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare. Va fi util să observăm că $f(x) = x^{-3} - x^{-4} + x^{-5}, \forall x > 0$.

(a) Pentru orice $x > 0$ avem $f'(x) = \boxed{-3x^{-4} + 4x^{-5} - 5x^{-6}}$.

(b) Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, dreapta $\boxed{y = 0}$ este asimptotă orizontală la graficul lui f către ∞.
Cum f este continuă pe $(0, \infty)$, singurul candidat de asimptotă verticală este dreapta $x = 0$. Avem $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0_+} \frac{x^2 - x + 1}{x^5} = \frac{1}{0_+} = \infty$, deci $\boxed{x = 0}$ este într-adevăr asimptotă verticală la graficul lui f.

(c) Continuăm calculul de la punctul (a). Pentru orice $x > 0$ avem $f'(x) = \frac{-3x^2 + 4x - 5}{x^6}$. Dar discriminantul expresiei de gradul doi de la numărătorul fracţiei este $\Delta = 4^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-5) = 16 - 60 = -44 < 0$, deci $-3x^2 + 4x - 5$ are semn constant şi anume este mereu negativă (are semnul lui -3). Deci $f'(x) < 0,\ \forall x > 0$, de unde rezultă că f este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$.

(d) Din $\sqrt{3} < \sqrt{5}$, conform punctului (c) rezultă $a = f(\sqrt{3}) > f(\sqrt{5}) = b$. Deci numărul mai mare este $\boxed{a}$.

(e) $\int_1^2 f(x)\,dx = \left(-\frac{x^{-2}}{2} + \frac{x^{-3}}{3} - \frac{x^{-4}}{4}\right)\Big|_1^2 = \boxed{\frac{61}{192}}$

4. Subiectul III.

Rezolvare. Scriem aici relaţiile lui Viète pe care le vom folosi repetat în rezolvare

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -a \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= b \\ x_1x_2x_3 &= -c \end{aligned}$$

(a) Dacă $a + b = c = -1$, atunci $f(1) = 1 + a + b + c = 1 - 1 = 0$.

(b) Substituind $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ şi $x_3 = 3$ în relaţiile lui Viète, obţinem

$$\begin{aligned} a &= -(x_1 + x_2 + x_3) = \boxed{-6} \\ b &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = \boxed{11} \\ c &= -x_1x_2x_3 = -1 \cdot 2 \cdot 3 = \boxed{-6} \end{aligned}$$

(c) Avem $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = a^2 - 2b$, deci din enunţ rezultă $b = a^2 - 2b$, de unde $a^2 = 3b$.

(d) Cum x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcini ale polinomului, avem

$$\begin{aligned} x_1^3 + ax_1^2 + bx_1 + c &= 0 \\ x_2^3 + ax_2^2 + bx_2 + c &= 0 \\ x_3^3 + ax_3^2 + bx_3 + c &= 0 \end{aligned}$$

Adunând aceste relaţii avem

$$(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + b(x_1 + x_2 + x_3) + 3c = 0$$

Folosind relaţiile lui Viète şi ipoteza, obţinem

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -ab - b \cdot (-a) - 3c = -3c$$

(e) Observăm că $a+b+c = -1$. Conform punctului (a), polinomul admite rădăcina $x_1 = \boxed{1}$. Atunci f se divide cu $X - 1$. Efectuând împărţirea avem

$$f = X^3 + X^2 - 3X + 1 = (X - 1)(X^2 + 2X - 1)$$

Rezolvând ecuaţia $x^2 + 2x - 1 = 0$, găsim $x_2 = \boxed{-1 + \sqrt{2}}$ şi $x_3 = \boxed{-1 - \sqrt{2}}$.

(f) Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Atunci $f(1) + f(-1) = (1 + a + b + c) + (-1 + a - b + c) = 2(a + c)$, deci este număr par.

(g) Presupunem că există a, b, c astfel ca $f(1)+f(-1)+f(i)+f(-i) = 2007$. Făcând substituţiile această relaţie este echivalentă cu $2(a + c) + (-i - a + bi + c) + (i - a - bi + c) = 2007$, sau $4c = 2007 \Leftrightarrow c = \frac{2007}{4} \in \mathbb{Z}$. Contradicţie.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x > 0$, avem $f'(x) = \boxed{1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}}$.

(b) Singura soluţie pozitivă a ecuaţiei $f'(x) = 0$ este $x = 1$. Cum în acest punct f' îşi schimbă semnul, rezultă că $\boxed{x = 1}$ este un punct de extrem local a lui f.

(c) Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, graficul funcţiei f nu are asimptote orizontale.

Căutăm o asimptotă oblică, care trebuie să fie de forma $y = mx+n$. Avem

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 1 \\ n &= \lim_{x\to\infty}[f(x)-mx] = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0 \end{aligned}$$

Deci $\boxed{y = x}$ este asimptota oblică la graficul lui f către ∞.

(d) Folosind punctul (a), avem

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}(f'(2)f'(3)\dots f'(n)) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\dots\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot(n+1)}{2n} = \boxed{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(e) Pentru orice $x > 0$ avem $g'(x) = \boxed{\frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}}$.

(f) Observăm că ecuaţia $g'(x) = 0$ are unica soluţie $x = 1$. Cum pentru $x \in (0,1)$, avem $g'(x) = \frac{1-x}{x} > 0$ şi pentru $x > 1$ avem $g'(x) = \frac{1-x}{x} < 0$, rezultă că funcţia g are un maxim global în $x = 1$. Deci $g(x) \le g(1) = 0$, $\forall x > 0$, ceea ce revine exact la $1 + \ln x \le x,\ \forall x > 0$.

(g) Pentru orice $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ avem $1 + \cos x > 0$. De la punctul precedent obţinem $\ln(1 + \cos x) \le \cos x$, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Integrând această inegalitate şi folosind monotonia integralei, avem $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\cos x)\,dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$. QED.