# BAC 2007

## Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 67

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

# Varianta 67

## 1. Subiectul I.

**Rezolvare.**

(a) Avem $i^{16} + i^{18} = (i^2)^8 + (i^2)^9 = (-1)^8 + (-1)^9 = 1 - 1 = 0$. Deci partea reală este $\boxed{0}$.

(b) $\bar{z} = \boxed{2 - i}$

(c) Panta dreptei date este $m = 1$. O dreaptă este perpendiculară pe aceastdreaptă dacă are panta $m = -1$. De exemplu, putem considera dreapta $\boxed{y = -x}$, sau $\boxed{y = -x + 2007}$.

(d) Iată chiar mai multe $\boxed{(2,0), (-2,0), (0,2), (0,-2)}$

(e) Aducând la acelaşi numitor şi simplificând cu $\pi \neq 0$, relaţia se scrie $1 = 4a - 3b$. Evident propunătorul aşteaptă să-i dăm răspunsul $\boxed{a = b = 1}$ (va fi de folos şi la punctul următor). Dar la fel de bine puteţi alege $\boxed{a = 4,\ b = 5}$ din infinitatea de perechi $(a, b)$ ce satisfac aceasta relaţie.

(f) Folosind punctul precedent şi identitatea furnizată avem,

$$\begin{aligned} \sin\frac{\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}} \end{aligned}$$

## 2. Subiectul II.1.

**Rezolvare.**

(a) $\det A = 3\cdot 2 - 1\cdot a = \boxed{6 - a}$

(b) Avem $\det A > 4 \Leftrightarrow 6 - a > 4 \Leftrightarrow a < 2 \Leftrightarrow a \in \mathbb{Z} \cap (-\infty, 2)$. Cel mai mare element al acestei mulţimi este $a = \boxed{1}$.

(c) Singura valoare a lui $a$ pentru care matricea $A$ nu este inversabilă este $a = 6$. Probabilitatea căutată este atunci $\boxed{\frac{3}{4}}$.

(d) **Prima rezolvare:** Ridicând la pătrat obţinem ecuaţia $6 - a = (4 - a)^2$, care se mai poate scrie $a^2 - 7a + 10 = 0$. Rădăcinile acestei ecuaţii pătratice sunt $a_1 = 2$ şi $a_2 = 5$. Mai rămâne să verificăm aceste soluţii (prin ridicare la pătrat se pot introduce rădăcini!). Astfel se vede că substituind $a_2 = 5$ în ecuaţia

iniţială obţinem $\sqrt{6-5} = 4-5$, adică $1 = -1$. Fals. Substituind $a_1$, avem într-adevăr o identitate, deci singura soluţie este $a = \boxed{2}$.
**A doua rezolvare:** Cum ni se cer doar soluţii numere naturale, nici nu are sens să mai rezolvăm ecuaţia. Condiţiile de existenţă vor fi aproape de ajuns. Din $6-0 \geq 0$, $4-a \geq 0$ şi $a \in \mathbb{N}$, avem astfel în mod necesar $a \in \{0,1,2,3,4\}$. Incercând pe rând aceste valori se observă că singura soluţie este $a = \boxed{2}$.

(e) Avem $\det A = 2a \Leftrightarrow 6-a = 2a \Leftrightarrow 6 = 3a \Leftrightarrow a = \boxed{2}$.

## 3. Subiectul II.2.

**Rezolvare.**

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f'(x) = \boxed{-1+\cos x}$.

(b) $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 + \cos\frac{\pi}{2} = \boxed{-1}$.

(c) Scriem limita sub forma $-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ şi din definiţia derivatei într-un punct, limita este $\boxed{-f'(0) = 0}$.

(d) Deoarece $f$ este continuă pe $\mathbb{R}$ şi $f(0) = 1$, avem o limită de tipul $1^0 = \boxed{1}$.

(e) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \left(x - \frac{x^2}{2} - \cos x\right)\Big|_0^1 = \boxed{\frac{3}{2} - \cos 1}$

## 4. Subiectul III.

**Rezolvare.** Ne va fi utilă observaţia $g = (X-1)(X-2)$.

(a) Calcul direct: $f\cdot g = (X-3)(X^2-3x+2) = X^3 - 3X^2 + 2X - 3X^2 + 9X - 6 = h$.

(b) Din teorema lui Bezout, restul este $g(3) = 3^2 - 3\cdot 3 + 2 = \boxed{2}$.

(c) Polinoamele

$$\begin{aligned} h+g &= fg+g = g(f+1) = (X^2-3X+2)(X-2) = (X-1)(X-2)^2 \\ h-g &= fg-g = g(f-1) = (X^2-3X+2)(X-4) = (X-1)(X-2)(X-4) \end{aligned}$$

au evident ca rădăcini comune pe $1$ şi $2$.

(d) Fie $x_0$ rădăcina întreagă comună a lui $q_1$ şi $q_2$. Atunci $(q_1+q_2)(x_0) = q_1(x_0) + q_2(x_0) = 0 + 0 = 0$, deci $q_1 + q_2$ are rădăcina întreagă $x_0$.
**Comentariu:** Verificare banală şi inutilă căci acest subpunct nu este folosit la restul problemei.

(e) Pentru orice $a \in \mathbb{Z}$, numărul $g(a) = (a-1)(a-2)$ este număr par, fiind produs de două numere întregi consecutive.

(f) Polinomul $P_3$ se divide prin polinomul $g = (X-1)(X-2)$ dacă şi numai dacă $P_3(1) = P_3(2) = 0$. Aceasta revine la sistemul

$$\begin{cases} 1^3 - a_3\cdot 1 - b_3 &= 0 \\ 2^3 - a_3\cdot 2 - b_3 &= 0 \end{cases}$$

Scăzând din a doua ecuaţie pe prima, obţinem $7 - a_3 = 0$, deci $a_3 = \boxed{7}$. Substituind în prima ecuaţie, deducem $b_3 = \boxed{-6}$.
**Comentariu:** Acest subpunct este caz particular al punctului următor.

(g) Polinomul $P_n$ se divide prin polinomul $g = (X-1)(X-2)$ dacă şi numai dacă $P_n(1) = P_n(2) = 0$. Aceasta revine la sistemul

$$\begin{cases} 1^n - a_n \cdot 1 - b_n = 0 \\ 2^n - a_n \cdot 2 - b_n = 0 \end{cases}$$

Scăzând din a doua ecuaţie pe prima, obţinem $2^n - 1 - a_n = 0$, de unde $a_n = \boxed{2^n - 1}$. Substituind în prima ecuaţie, deducem $b_n = \boxed{2 - 2^n}$.

## 5. Subiectul IV.

**Rezolvare.**

(a) Pentru orice $x \in (0, \infty)$, avem $f_1'(x) = x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' = \boxed{\ln x + 1}$.

(b) Ecuaţia $f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1$ are singura rădăcină $x_1 = \dfrac{1}{e}$, care este singurul punct critic al lui $f_1$. Cum $f_1'(x) < 0$, pentru $x < x_1$ şi $f_1'(x) > 0$, pentru $x > x_1$, rezultă că $x_1$ este un punct de extrem local, mai exact un punct de minim local.

(c) Deoarece $f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$, pentru orice $x > 0$, funcţia $f$ este convexă pe $(0, \infty)$.

(d) Integrăm prin părţi :

$$\begin{aligned} \int_1^e f_2(x)\,dx &= \int_1^e x^2 \ln x\,dx = \int_1^e \left(\frac{x^3}{3}\right)' \ln x\,dx = \frac{x^3 \ln x}{3}\bigg|_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{x^3}{9}\bigg|_1^e = \boxed{\frac{2e^3 + 1}{9}}. \end{aligned}$$

(e) Observăm că pentru orice $x \geq 1$ avem $f_2(x) = x^2 \ln x \geq x \ln x = f_1(x)$. Integrând pe $[1, e]$ şi folosind monotonia integralei, rezultă exact inegalitatea din enunţ.

(f) Avem $f_n'(x) = nx^{n-1} \ln x + x^n \ln x = x^{n-1}(n + \ln x)$. Ecuaţia $f_n'(x) = 0$ are atunci singura rădăcină strict pozitivă $x_n = e^{-1/n}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = e^0 = \boxed{1}$.

(g) Cu substituiţia $y = \dfrac{1}{x}$ şi folosind apoi regula lui l'Hopital pentru o nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$, avem

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f_n(x) &= \lim_{y\to\infty} \frac{1}{y^n} \ln \frac{1}{y} = -\lim_{y\to\infty} \frac{\ln y}{y^n} \\ &= -\lim_{y\to\infty} \frac{\frac{1}{y}}{ny^{n-1}} = -\lim_{y\to\infty} \frac{1}{ny^n} = \boxed{0} \end{aligned}$$