BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 66

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 66

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Simetricul punctului $A(2,0)$ faţă de $O(0,0)$ este punctul $A'(-2,0)$.

(b) Avem $\left|\frac{2+3i}{3+2i}\right| = \frac{|2+3i|}{|3+2i|} = \frac{\sqrt{2^2+3^2}}{\sqrt{3^2+2^2}} = \boxed{1}$.

(c) Funcţia $\cos$ este descrescătoare pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Deoarece $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$ rezultă $\boxed{b = \cos\frac{\pi}{8} > \cos\frac{\pi}{6} = a}$.

(d) $(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 4$, deci într-adevăr punctul $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ aparţine cercului de ecuaţie $x^2 + y^2 = 4$.

(e) Cu formula distanţei (teorema lui Pitagora) rezultă

$$|AB| = \sqrt{(3-1)^2 + (2-2)^2 + (1-3)^2} = \boxed{2\sqrt{2}}.$$

(f) Vectorii $\vec{v}$ şi $\vec{w}$ sunt ortogonali dacă şi numai dacă produsul lor scalar este zero. Avem

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = 0 \Leftrightarrow a\cdot 1 + 1\cdot 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = -2}.$$

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Din $\sqrt{x+2} = \sqrt{2x+1}$, prin ridicare la pătrat, obţinem $x+2 = 2x+1 \Leftrightarrow x = 1$. **Trebuie** să verificăm faptul că rezultatul găsit satisface ecuaţia originală. Or, $\sqrt{1+2} = \sqrt{2\cdot 1+1} = \sqrt{3}$. Am găsit aşadar soluţia unică $\boxed{x = 1}$.

(b) $\log_2 8 - \log_3 9 = 3 - 2 = 1 \in \mathbb{Z}$.

(c) Discriminantul ecuaţiei de gradul doi este $\Delta = 1 - 4\cdot(-2) = 9$. Soluţiile ecuaţiei sunt

$$x \in \{\frac{-1-3}{2}, \frac{-1+3}{2}\} = \boxed{\{-2, 1\}}$$

(d) Notând $t = 4^x$, ecuaţia $4^x + 16^x = 20$ devine $t + t^2 = 20$, sau $t^2 + t - 20 = 0$, de unde $t \in \{-5, 4\}$. Ecuaţia $4^x = -5$ nu are soluţii reale, iar ecuaţia $4^x = 4$ are soluţia unică $\boxed{x = 1}$.

(e) Examinând tabelul

n	1	2	3	4	5
$3n$	3	6	9	12	15
2	4	8	16	32	

constatăm că inegalitatea $3n < 2^n$ este satisfăcută de două numere din cinci, anume $n \in \{4, 5\}$. Probabilitatea cerută este $\boxed{p = \frac{2}{5}}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) $\boxed{f'(x) = 3 - \cos x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (3x - \sin x)\,dx = \left(\frac{3x^2}{2} + \cos x\right)\Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{2} + \cos 1}$.

(c) Limita din enunţ este tocmai derivata funcţiei f în $x = 0$, adică $\boxed{f'(0) = 3 - \cos 0 = 2}$.

(d) Cu formula de la (a) observăm că $f'(x) = 3 - \cos x \geq 2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, aşadar f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(e) Avem

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-(n^2-n)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}$$

[am amplificat cu conjugatul]

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$$

[am dat factor comun forţat pe n atât la numărător cât şi la numitor]

$$= \frac{2}{1+1} = \boxed{1}$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) $f(0) = i^{10} + (-i)^{10} = 2i^{10} = 2 \cdot (-1)^5 = \boxed{-2}$.

(b) Coeficientul lui X^{10} este $a_{10} = 1{+}1 = \boxed{2}$. Coeficientul liber este $a_0 = f(0) = -2$.

(c) Suma coeficienţilor polinomului f este $f(1)$. Avem

$$f(1) = (1+i)^{10} + (1-i)^{10} = (1-1+2i)^5 + (1-1-2i)^5 = 32i^5 + 32(-i)^5 = \boxed{0}.$$

(d) $f(i) = (i+i)^{10} + (i-i)^{10} = 2^{10}i^{10} = -\boxed{1024}$.

(e) Folosim următorul rezultat auxiliar, pe care îl şi demonstrăm mai jos.

Dacă $f \in \mathbb{C}[X]$ are proprietatea că $f(x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, atunci $f \in \mathbb{R}[X]$.

▼[detalii]

Demonstrăm prin inducţie după n, gradul polinomului. Pentru $n = 0$ propoziţia este evident adevărată. Presupunând-o adevărată pentru $n \in \mathbb{N}$, fie $f \in \mathbb{C}[X]$ un polinom de gradul $n + 1$ ce satisface $f(x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Fie $f = a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n+1} X^{n+1}$. Atunci $a_0 = f(0) \in \mathbb{R}$. Notând cu $g = a_1 + a_2 X + \ldots + a_{n+1} X^n$, avem $g(x) = \frac{f(x)-a_0}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$. Atunci $g(x) \in \mathbb{R}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$ şi e uşor de văzut că şi $g(0) \in \mathbb{R}$ (trecem la limită). Deoarece are gradul n, conform ipotezei de inducţie rezultă că $g \in \mathbb{R}[X]$, de unde şi $f = a_0 + gX \in \mathbb{R}[X]$, q.e.d.

Revenind la problema noastră, avem

$$f(x) = (x+i)^{10} + (x-i)^{10} = (x+i)^{10} + (\overline{x+i})^{10} = (x+i)^{10} + \overline{(x+i)^{10}} \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

deci f are toţi coeficienţii reali, q.e.d.

Acest subpunct poate fi demonstrat şi prin calcul direct, folosind binomul lui Newton. Am vrut însă să evităm acest lucru.

(f) Fie $z \in \mathbb{C}$ o rădăcină a lui f. Atunci

$$f(z) = 0 \iff (z+i)^{10} = (z-i)^{10} \iff (z+i)^{10} = -(z-i)^{10} \Rightarrow |z+i|^{10} = |z-i|^{10},$$

de unde rezultă şi $|z + i| = |z - i|$

(g) Folosim punctul anterior. Demonstrăm mai mult, şi anume, pentru $z \in \mathbb{C}$, avem $|z + i| = |z - i|$ dacă şi numai dacă $z \in \mathbb{R}$. Într-adevăr, fie $z = a + ib$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Atunci $z + i = a + (b + 1)i$ şi $z - i = a + (b - 1)i$. Avem

$$|z+i| = |z-i| \iff |z+i|^2 = |z-i|^2 \iff a^2+(b+1)^2 = a^2+(b-1)^2 \iff b = 0 \iff z = a \in \mathbb{R}.$$

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Avem $\boxed{f'(x) = 2006(x+1)^{2005} - 2006}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) $f(0) = 1 - 1 = \boxed{0}$ şi $f'(0) = 2006 - 2006 = \boxed{0}$.

(c) **Prima soluţie.** f este continuă pe $\mathbb{R}$. Deoarece $f''(x) = 2006 \cdot 2005(x+1)^{2004} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, rezultă că f este convexă pe $\mathbb{R}$. Inegalitatea strictă nu e necesară, însă o vom folosi mai jos. Oricum, nu strică să fim precişi.

A doua soluţie. Funcţia $u \mapsto (u + 1)^{2005} - 1$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, fiind obţinută prin compunerea a două funcţii strict crescătoare: $v \mapsto v + 1$ şi $w \mapsto w^{2005} - 1$. Prin urmare $f'(x) = 2006\left[(x+1)^{2005} - 1\right]$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, deci f este convexă pe $\mathbb{R}$.

(d) Am văzut la punctul precedent că f' este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. Deoarece $f'(0) = 0$, avem

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & , x \in (-\infty, 0) \\ > 0 & , x \in (0, \infty) \end{cases}.$$

Deci $x = 0$ este punct de minim global pentru f, de unde obţinem $f(x) \geq f(0) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Inegalitatea este strictă , exceptând originea.

(e) Vom aplica regula lui l'Hopital succesiv de două ori:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^{2006}-2006x-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2006(x+1)^{2005}-2006}{2x}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2006\cdot 2005(x+1)^{2004}}{2} = \frac{2006\cdot 2005\cdot 1}{2} = \boxed{1003\cdot 2005}\,.$$

(f) Fie $x \geq 0$ **fixat**. Inegalitatea de la (d) aplicată numerelor $t \in [0,x]$ poate fi scrisă şi

$$(t+1)^{2006} \geq 2006t+1, \quad \forall t \in [0,x]\,.$$

Integrând pe intervalul $[0,x]$ obţinem

$$\int_0^x (t+1)^{2006}\,dt \geq \int_0^x (2006t+1)\,dt\,,$$

adică

$$\frac{(x+1)^{2007}-1}{2007} \geq 2006\cdot\frac{x^2}{2}+x\,,$$

sau

$$(x+1)^{2007} \geq 2007\cdot 1003x^2+2007x+1\,,$$

q.e.d.

Observaţie. Acest punct poate fi rezolvat şi direct, folosind binomul lui Newton.

Pro Didactica vă urează succes la BAC.
De la toamnă vă aşteptăm cu întrebări din materia de facultate.