BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 65

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

65

1. Subiectul I

Rezolvare.

(a) Cu formula distanţei (teorema lui Pitagora) obţinem

$$|AB| = \sqrt{(1-(-2))^2+(1-5)^2} = \boxed{5}\,.$$

(b) Deoarece $\overrightarrow{NP} = (2,4) = 2\overrightarrow{MN}$, vectorii $\overrightarrow{NP}$ şi $\overrightarrow{MN}$ sunt paraleli. Prin urmare, punctele M, N şi P sunt colineare.

(c) Avem

$$1+(a+b)i = a+3i \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 1 = a \\ a+b=3 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \boxed{\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}}$$

(d) Deoarece suma unghiurilor într-un triunghi este $180°$, avem $5m(\hat{A}) = m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180° - m(\hat{A})$, de unde $6m(\hat{A}) = 180°$, sau $m(\hat{A}) = 30°$. Deci $\sin\hat{A} = \sin 30° = \boxed{\frac{1}{2}}$.

(e) Deoarece $\sin 0 = \sin\pi = 0$, putem alege $\boxed{x=0}$ respectiv $\boxed{y=\pi}$.

(f) Doi vectori sunt perpendiculari dacă şi numai dacă produsul lor scalar este zero. În cazul de faţă

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (-2)\cdot 3 + 3\cdot 2 = 0\,,$$

deci $\vec{u}\perp\vec{v}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Avem $\frac{3}{2} * \frac{2}{3} = \dfrac{2\cdot\frac{3}{2}+3\cdot\frac{2}{3}}{2} = \boxed{\frac{5}{2}}$.

(b) Avem

$$x*a = x \;\Leftrightarrow\; \frac{2\cdot x+3\cdot a}{2} = x \;\Leftrightarrow\; 2x+3a = 2x \;\Leftrightarrow\; 3a=0 \;\Leftrightarrow\; \boxed{a=0}\,.$$

Evident, relaţiile de mai sus sunt valide pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

(c) Existenţa ipoteticului număr c nu este asigurată automat. Luând valorile particulare $a = b = 0$, numărul c trebuie să verifice relaţia

$$(0 * 0) * c = 0 * (0 * c) \;\Leftrightarrow\; 0 * c = 0 * \frac{3c}{2} \;\Leftrightarrow\; \frac{3c}{2} = \frac{9c}{4} \;\Leftrightarrow\; \boxed{c = 0}.$$

Verificăm faptul că $c = 0$ satisface condiţia din enunţ. Într-adevăr, folosind punctul precedent, obţinem

$$(a * b) * 0 = a * b = a * (b * 0), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

(d) Avem

$$2^x * 2^x = 10 \;\Leftrightarrow\; \frac{2 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^x}{2} = 10 \;\Leftrightarrow\; 5 \cdot 2^x = 20 \;\Leftrightarrow\; 2^x = 4 \;\Leftrightarrow\; \boxed{x = 2}.$$

(e) Avem

$$\log_2 x * \log_2 x = 10 \;\Leftrightarrow\; \frac{2 \cdot \log_2 x + 3 \cdot \log_2 x}{2} = 10 \;\Leftrightarrow\; 5 \cdot \log_2 x = 20$$
$$\Leftrightarrow\; \log_2 x = 4 \;\Leftrightarrow\; x = 2^4 = \boxed{16}.$$

3. Subiectul II.2.

Rezolvare. Este util să explicităm funcţia dată. Avem

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 2x & , x \in (-\infty, 1) \\ 2x - 2 & , x \in [1, \infty) \end{cases}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(a) Produsul din enunţ conţine factorul $f(1) = 0$, deci întreg produsul este egal cu $\boxed{0}$.

(b) Folosind formula de la începutul rezolvării, avem

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & , x \in (-\infty, 1) \\ 2 & , x \in (1, \infty) \end{cases}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Notăm faptul că f nu este derivabilă în $x = 1$. Avem

$$f'(-2) + f(2) = -2 + 2 = \boxed{0}.$$

(c) $f(x) = 4 \;\Leftrightarrow\; |2x - 2| = 4 \;\Leftrightarrow\; |x - 1| = 2 \;\Leftrightarrow\; x - 1 \in \{-2, 2\} \;\Leftrightarrow\; x \in \boxed{\{-1, 3\}}$.

(d) Avem

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{f(n)}{2n}\right)^{\frac{2}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{n}} = (1 - 0)^0 = \boxed{1}.$$

(e) Deoarece $f(x) = 2x - 2$, $\forall x \in [1, 2]$, rezultă

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 (2x-2)\,dx = (x^2 - 2x)\Big|_1^2 = \boxed{1}.$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Folosind formula lui Sarrus, $\det A(2) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 1 + 1 - 2 - 2 - 2 = \boxed{4}$.

Prin urmare $A(2)$ este inversabilă, deci rangul său este egal cu $\boxed{3}$.

(b) Avem

$$A(1)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3A(1).$$

De aici rezultă imediat (de exemplu, prin inducţie) că

$$A(1)^n = \boxed{3^{n-1}A(1)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

(c) O matrice $\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$ din H este unic determinată de valoarea lui $x \in M$. Deci H şi M au acelaşi număr de elemente, adică $\boxed{5}$.

(d) Nu are rost să căutăm acul în carul cu fân. Am văzut la punctul (b) că $A(1)^2 = 3A(1)$. Cu alte cuvinte $A(1)(I_3 - 2A(1)) = A(1)$, sau $A(1)A(-1) = A(1)$. Alegem deci $\boxed{x = 1}$ şi $\boxed{y = -1}$, care au proprietatea cerută.

(e) Pentru orice $x \in M$ avem

$$\det A(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = x^3 + 2 - 3x = 2 + x(x^2 - 3).$$

Numerele x şi $x^2 - 3$ sunt de parităţi diferite, deci $\det A(x)$ este întotdeauna număr par.

(f) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix} \in G$ astfel încât $\det A$ este impar. Atunci fiecare linie a matricii A conţine cel puţin un element impar. ▼[detalii]

În caz contrar, dezvoltând determinantul după linia respectivă, am obţine că $\det A$ este număr par.

Deoarece toate elementele matricii A aparţin mulţimii M, iar singurele numere impare din M sunt $\{1, -1\}$ rezultă că A are cel puţin trei elemente egale cu 1 sau -1.

(g) Presupunem prin absurd că toate elementele matricii $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix}$ sunt numere impare. Atunci

$$\det A = ayw + bzu + cxv - cyu - azv - bxw$$

este o sumă de **şase** numere impare, deci este număr par, contradicţie cu ipoteza.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Funcţia este continuă pe întreg domeniul său de definiţie. Deoarece $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty$, graficul său are asimptota verticală $\boxed{x = 0}$. De asemenea, deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, graficul lui f are către infinit asimptota orizontală de ecuaţie $\boxed{y = 0}$.

(b) Avem $\boxed{f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}} < 0$, $\forall x \in (0, \infty)$. Aşadar f este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$.

(c) Aria cerută este

$$\int_1^2 \left|f(x)\right| dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2}\, dx = -\left.\frac{1}{x}\right|_1^2 = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

(d) Deoarece $2 < e < 3$ şi $3 < \pi < 4$ avem

$$\frac{25}{144} = \frac{1}{9} + \frac{1}{16} < \frac{1}{e^2} + \frac{1}{\pi^2} < \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{13}{36} = \frac{52}{144}.$$

(e) Fie $k \geq 2$. Atunci

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k-(k-1)}{(k-1)k} = \frac{1}{k^2-k} > \frac{1}{k^2}.$$

(f) Folosind punctul precedent, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, avem

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \\ &< 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \\ &= 2 - \frac{1}{n} < 2. \end{aligned}$$

Prin urmare şirul $(a_n)_n$ este mărginit superior, deci este mărginit, având toţi termenii pozitivi.

(g) Este uşor de stabilit o legătură între cele două şiruri. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem

$$b_n + \underbrace{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2}}_{=\frac{1}{4}a_n} = \underbrace{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2}}_{=a_{2n}}.$$

Cu alte cuvinte $b_n = a_{2n} - \frac{1}{4}a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_{2n} - \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty} a_n = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\frac{\pi^2}{6} = \boxed{\frac{\pi^2}{8}}.$$