BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 64

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 64

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Folosind faptul că $i^2 = -1$ şi $i^4 = 1$, obţinem

$$z = i^{2004} \cdot i^2 + i^{2004} \cdot i^2 \cdot i = -1 - i$$

Atunci $Re(z) = \boxed{-1}$.

(b) Fie M mijlocul lui $[BC]$. Atunci

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{2+0}{2} = -\frac{2}{2} = 1$$

$$y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{0+4}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Deci M are coordonatele $M(1,2)$. Mediana din A are lungimea

$$AM = \sqrt{(-2-1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{9+16} = \boxed{5}$$

(c) Deoarece $\cos x^\circ = \sin(90^\circ - x^\circ)$, obţinem $\cos 75^\circ = \sin 15^\circ$. Atunci $\cos^2(75^\circ) + \cos^2(15^\circ) = \sin^2(15^\circ) + \cos^2(15^\circ) = \boxed{1}$.

(d) Cercul cu centrul în origine şi de rază 1 are ecuaţia $x^2 + y^2 = 1$. Coordonatele punctelor de intersecţie dintre dreaptă şi cerc sunt soluţiile sistemului $\begin{cases} y = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$, adică $x = 0, y = 1$. Dreapta intersectează cercul $\boxed{\text{într-un singur punct}}$, şi anume $A(0,1)$ (dreapta este tangentă la cerc).

(e) Fie $A(\alpha,\beta), \alpha,\beta \in \mathbb{Z}$. Punctul A aparţine cercului, deci coordonatele sale verifică ecuaţia cercului $\alpha^2 + \beta^2 = 4$. Din $\alpha,\beta \in \mathbb{Z}$ rezultă că $\alpha^2, \beta^2 \in \mathbb{N}$. Astfel, suma a două pătrate perfecte trebuie să fie 4. Singurele posibilităţi sunt $0+4$ şi $4+0$. Obţinem $\alpha = 0, \beta = \pm 2$ sau $\alpha = \pm 2, \beta = 0$. Răspunsul este deci $\boxed{4}$ puncte de intersecţie.

(f) Ecuaţia dreptei date se scrie $y = 3x - 2$, deci are panta 3. Două drepte sunt paralele dacă au aceeaşi pantă. Ni se cere astfel să scriem ecuaţia unei drepte de pantă 3. Putem lua de exemplu $\boxed{y = 3x}$.

2. Subiectul II.1

Rezolvare.

(a) Deoarece $a = \sqrt[6]{8}$ şi $b = \sqrt[6]{9}$, avem $a < b$. Numărul mai mare este deci $\boxed{b}$.

(b) Pentru prima cifră a numerelor cerute avem la dispoziţie 7 valori, şi anume $\{1,4,5,6,7,8,9\}$, iar pentru a doua cifră 8 valori, şi anume $\{0,1,4,5,6,7,8,9\}$. Răspunsul este deci $7 \cdot 8 = \boxed{56}$.

(c) Din dubla inegalitate dată obţinem

$$\log_2 c > 2 \Rightarrow c > 2^2 = 4$$

$$\log_2 c < 3 \Rightarrow c < 2^3 = 8$$

Ţinând cont că $c \in \mathbb{Z}$, obţinem $c \in \{5,6,7\}$ şi numărul valorilor cerute este deci $\boxed{3}$.

(d) Folosim faptul că $[x] = k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in [k, k+1)$, obţinem

$$\frac{2d}{3} \in [2,3) \Leftrightarrow 2d \in [6,9) \Leftrightarrow d \in \left[3, \frac{9}{2}\right)$$

Deoarece $d \in \mathbb{Z}$, avem $\boxed{d \in \{3,4\}}$.

(e) Pentru un polinom de gradul trei $f = ax^3 + bx^2 + cx + d$, produsul rădăcinilor este $x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$, deci este necesar şi suficient să luăm $\frac{d}{a} = -2$. De exemplu, $\boxed{f = x^3 - 2}$.

3. Subiectul II.2

Rezolvare.

(a) Pentru orice x real avem

$$f'(x) = \frac{2(x^2+3) - 2x \cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \boxed{\frac{6-2x^2}{(x^2+3)^2}}$$

(b) Determinăm punctele critice

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \boxed{\pm 3}$$

Deoarece f' schimbă semnul în aceste puncte, ele sunt de extrem.

(c) Pentru $x \in (\sqrt{3}, \infty)$, $f'(x) < 0$, deci f este strict descrescătoare pe $[\sqrt{3}, \infty)$. Obţinem astfel $f(\sqrt{3}) > f(2)$, deci $\boxed{a > b}$.

(d) Deoarece gradul numitorului este mai mare decât gradul numărătorului, avem $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, deci dreapta de ecuaţie $\boxed{y = 0}$ este asimptotă orizontală spre ∞.

(e) $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{2x}{x^2+3}\,dx = \int_0^1 \frac{(x^2+3)'}{x^2+3}\,dx = \ln|x^2+3|\Big|_0^1 = \ln 4 - \ln 3 = \boxed{\ln \frac{4}{3}}$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}$$

(b) $\det(A^n) = (\det(A))^n = 1^n = 1 \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

(c) Cum $\det(A) = 1 \neq 0$, rezultă că rangul matricei A este $\boxed{2}$.

(d) Fie $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in G$. Relaţia $AX = XA$, care înseamnă

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

după calcule revine la

$$\begin{pmatrix} x & y \\ x+z & y+w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & y \\ z+w & w \end{pmatrix}$$

Rezultă $y = 0$ şi $x = w$. Notând $a = x$ şi $b = z$, avem

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$$

(e) Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Notăm $P(n) : \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ nba^{n-1} & a^n \end{pmatrix}$. Verificăm pentru prima valoare a lui n:

$$P(1) : \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 \cdot b \cdot a^0 & a \end{pmatrix}$$

relaţie adevărată pentru $a \neq 0$. In cazul $a = 0$ avem o **nedeterminare**.

Presupunem $P(n)$ adevărată şi demonstrăm că $P(n+1)$ este adevărată. Avem

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}^{n+1} &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ nba^{n-1} & a^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 \\ (n+1)ba^n & a^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Deci $P(n+1)$ este adevărată în ipoteza că $P(n)$ este adevărată. Cum $P(1)$ este adevărată, conform principiului inducţiei matematice, $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \geq 1$.

(f) Fie $X \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $X^n = A$. Atunci $AX = X^nX = X^{n+1}$ şi $XA = XX^n = X^{n+1}$. Deci $AX = XA$ adică $X \in G$.

(g) Din punctul precedent rezultă că o condiţie necesară pentru ca $X^{2007} = A$, este $X \in G$. Din punctul (d) rezultă atunci că X este de forma $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$. Ecuaţia devine atunci

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}^{2007} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sau folosind punctul (e)

$$\begin{pmatrix} a^{2007} & 0 \\ 2007ba^{2006} & a^{2007} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rezultă $a = 1$ şi $b = \dfrac{1}{2007}$, adică $X = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2007} & 1 \end{pmatrix}}$.

5. Subiectul IV

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x > 0$ avem $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $g'(x) = \dfrac{2(x+1)-(2x-2)}{(x+1)^2} = \dfrac{4}{(x+1)^2}$. Rezultă $f'(1) = \boxed{1}$, $g'(1) = \boxed{1}$.

(b) Pentru orice $x > 0$ avem

$$\begin{aligned} f'(x) \geq g'(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} \geq \frac{4}{(x+1)^2} \Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 4x \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

relaţie adevărată.

(c) Fie $h : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - g(x)\ \forall x \geq 1$. Avem $h'(x) = f'(x) - g'(x)$. Din calculul de la punctul precedent rezultă că $h'(x) > 0, \forall x > 1$. Atunci h este strict crescătoare pe intervalul $[1, \infty)$. Deoarece $h(1) = f(1) - g(1) = 0 - 0 = 0$, rezultă $h(x) \geq 0, \forall x \geq 1$ şi soluţia inecuaţiei este $\boxed{[1, \infty)}$.

(d) Aplicând regula lui L'Hospital pentru un caz de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$, obţinem

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \boxed{0}$$

(e) Integrăm prin părţi

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x)\,dx &= \int_1^2 \ln x\,dx = \int_1^2 x' \ln x\,dx \\ &= x \ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x}\,dx = 2\ln 2 - x\Big|_1^2 = \boxed{2\ln 2 - 1} \end{aligned}$$

(f) Integrăm inegalitatea de la punctul (c) pe intervalul $[1, 2]$ şi folosind monotonia integralei obţinem exact inegalitatea cerută.

(g) **Prima rezolvare.** Calculăm mai întâi

$$\int_1^2 g(x)\,dx = 2\int_1^2 \frac{x-1}{x+1}\,dx = 2\int_1^2\left(1-\frac{2}{x+1}\right)dx$$
$$= 2(x-\ln|x+1|)\Big|_1^2 = 2-4\ln 3+4\ln 2$$

Vom arăta acum că inegalitatea de la (f) este strictă. Pentru aceasta revenim la funcţia h de la (c). Am văzut că h este strict crescătoare pe $[1,\infty)$. Atunci $h(x)>0$, $\forall x\in(1,2]$. In consecinţă, cum h este continuă, pozitivăşi nu identic nulă, rezultă că $\int_1^2 h(x)\,dx>0 \Leftrightarrow \int_1^2 f(x)\,dx > \int_1^2 g(x)\,dx$.

Folosind acum şi punctul (e), inegalitatea precedentă devine

$$\begin{aligned} 2\ln 2-1>2-4\ln 3+4\ln 2 &\Leftrightarrow 4\ln 3>3+2\ln 2\\ &\Leftrightarrow \ln 3^4>\ln e^3+\ln 2^2\\ &\Leftrightarrow \ln 81>\ln 4e^3\\ &\Leftrightarrow 81>4e^3 \end{aligned}$$

QED

A doua rezolvare. Cei care preferă să memoreze că $e = 2,7182...$ şi în special faptul că $e<2,72$, pot apoi să scrie $4\cdot e^3<4\cdot 2,72^3=4\cdot 20,123648=80,494592<81$, QED.

Pro Didactica vă urează succes la BAC.
De la toamnă vă aşteptăm cu întrebări din materia de facultate.