BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 63

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 63

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) $|\vec{v}| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2} = \boxed{\sqrt{5}}$

(b) $d(A, C) = \sqrt{(10-1)^2 + (0-0)^2 + (1-10)^2} = \boxed{9\sqrt{2}}$

(c) $\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{6} = 1 + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{2}}$

(d) Coordonatele simetricului lui $(2, 1)$ faţă de axa Ox sunt $\boxed{(2, -1)}$.

(e) Raza cercului de ecuaţie $x^2 + y^2 = 1^2$ este $\boxed{1}$.

(f) Amplificând cu conjugatul numitorului, avem

$$a + bi = \frac{i-1}{i+1} = \frac{(i-1)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{i - 1 - i^2 + i}{1 - i^2} = \frac{2i}{2} = 2$$

Prin urmare $a = \boxed{0}$, $b = \boxed{1}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Deoarece $\hat{5} \cdot \hat{5} = \hat{1}$, rezultă că $\hat{5}^{-1} = \hat{5}$ în $\mathbb{Z}_6$. Ecuaţia se scrie atunci

$$\hat{5} \cdot \hat{x} = \hat{2} \Leftrightarrow \hat{x} = \hat{5}^{-1} \cdot \hat{2} = \hat{5} \cdot \hat{2} = \boxed{\hat{4}}.$$

(b) Unul din factori este $2^0 - 1 = 0$, deci produsul este $\boxed{0}$.

(c) $\log_2 x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 2^2 \Leftrightarrow x = \boxed{2}$. Nu am luat în considerare şi rădăcina $x = -2$, căci ni s-au cerut numai soluţii strict pozitive.

(d) **Prima soluţie.** Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5^x + 25^x$ este strict crescătoare (sumă de două funcţii strict crescătoare). Cum $f(1) = 30$, rezultă că singura soluţie a ecuaţiei $f(x) = 30$ este $x = \boxed{1}$.
A doua soluţie. Notăm cu $t = 5^x$. Ecuaţia de vine $t + t^2 = 30$, sau $t^2 + t - 30 = 0$, deci $t \in \{-6, 5\}$. Revenim la variabila originală x. Ecuaţia $5^x = -6$ nu are soluţii reale, iar ecuaţia $5^x = 5$ are soluţia unică $\boxed{x = 1}$.

(e) Verificăm succesiv: $2^1 > 1^2$, $2^2 = 2^2$, $2^3 = 8 < 9 = 3^2$, $2^4 = 16 = 4^2$ şi $2^5 = 32 > 25 = 5^2$. Deoarece 2 din cele 5 elemente ale mulţimii satisfac inegalitatea din enunţ, probabilitatea este $\boxed{\frac{2}{5}}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f'(x) = \boxed{\cos x - 1}$.

(b) $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (\sin x - x)\,dx = \left(-\cos x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{2} - \cos 1}$

(c) Conform definiţiei derivatei unei funcţii într-un punct, limita este $f'(1) = \boxed{\cos 1 - 1}$.

(d) Deoarece $f'(x) = \cos x - 1 < 0$ pentru orice x real cu excepţia mulţimii izolate de puncte $\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, funcţia f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

(e) Având cazuri de nedeterminare $\frac{0}{0}$, folosim de trei ori regula lui l'Hopital şi obţinem

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{6} = \boxed{-\frac{1}{6}}\end{aligned}$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Prin calcul direct

$$\begin{aligned}AB &= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}\\ BA &= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}\end{aligned}$$

(b) Determinantul unei matrici triangulare (inferior în acest caz) este produsul elementelor de pe diagonală, deci $\det A = \boxed{-1}$. Cum $\det A \neq 0$, deducem că rangul lui A este maxim, adică $\boxed{3}$.

(c) Prin calcul direct

$$A^2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = I_3$$

$$B^2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = I_3 .$$

(d) Conform punctului precedent, A este inversabilă şi $A^{-1} = \boxed{A}$.

(e) Folosind din nou punctul (c), avem

$$\begin{aligned} X &= A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{2007} = A + I_2 + A + I_2 + \ldots + A \\ &= 1004A + 1003I_2 = \begin{pmatrix}2007 & 0 & 0 & \\ 1004 & -1 & 0 & \\ 0 & 0 & & 2007\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Atunci $\det X = \boxed{-2007^2}$.

(f) Fie $C \in M_3(\mathbb{R})$. Cum A este inversabilă, $AY = C \Leftrightarrow Y = A^{-1}C$, qed.

(g) Folosind forma lui AB determinată la punctul (a), se vede uşor că coeficientul matricii $(AB)^n$ de pe a doua linie şi a doua coloană este un număr natural strict mai mare decât 1, deci **strict pozitiv**. Prin urmare, $(AB)^n \neq I_3$.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f'(x) = \boxed{2008\left[(x+4)^{2007} - x^{2007}\right]}$.

(b) Fie $x \in \mathbb{R}$. Atunci

$$f(-2-x) + f(-2+x) = (2-x)^{2008} - (-2-x)^{2008} + (2+x)^{2008} - (-2+x)^{2008} = 0 .$$

(c) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $x + 4 > x \Rightarrow (x+4)^{2007} > x^{2007}$. Atunci $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(d) Bănuim că ni se cer soluţiile reale ale ecuaţiei. Pentru $x = 0$ în identitatea de la punctul (b), obţinem $f(-2) + f(-2) = 0$, de unde $f(-2) = 0$. Dar conform punctului (c), funcţia f este strict crescătoare, deci singura soluţie reală a ecuaţiei este $x = \boxed{-2}$.

(e) **Prima soluţie.** Folosind binomul lui Newton, avem

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^{2007}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{C^1_{2008}x^{2007}\cdot 4 + C^2_{2008}x^{2006}\cdot 4^2 + \ldots + 4^{2008}}{x^{2007}} \\ &= C^1_{2008}\cdot 4 = \boxed{8032}\end{aligned}$$

A doua soluţie. Conform teoremei lui Lagrange, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ există $c = c(x) \in (x.x+4)$ astfel încât

$$f(x) = (x+4)^{2008} - x^{2008} = 4f'(c) = 4\cdot 2008\cdot c(x)^{2007} .$$

Este uşor de văzut că $\lim_{x\to\infty} \frac{c(x)^{2007}}{x^{2007}} = 1$, de unde găsim că limita din enunţ este egală cu $4 \cdot 2008 = \boxed{8032}$.

(f)

$$\int_{-4}^{0} f(x)\,dx = \int_{-4}^{0} [(x+4)^{2008} - x^{2008}]\,dx = \left[\frac{(x+4)^{2009}}{2009} - \frac{x^{2009}}{2009}\right]\Bigg|_{-4}^{0} = \boxed{0}$$

(g) Continuăm calculul de la punctul (a). Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem

$$f''(x) = 2008 \cdot 2007 \cdot \left[(x+4)^{2006} - x^{2006}\right].$$

Folosind formula

$$A^{2006} - B^{2006} = (A^2 - B^2)(A^{2004} + A^{2004}B^2 + A^{2002}B^4 + \ldots + B^{2004})$$

notăm că semnul lui $A^{2006} - B^{2006}$ coincide cu semnul lui $A^2 - B^2$. Atunci semnul lui $f''(x)$ este dat de semnul lui $(x+4)^2 - x^2 = 8(x+2)$. Cum pentru $x \in (-\infty, -2]$ avem $8(x+2) \leq 0$, rezultă că $f''(x) \leq 0$ şi prin urmare f este concavă pe $(-\infty, -2]$. Similar, pentru $x \geq -2$, avem $8(x+2) \geq 0$, deci $f''(x) \geq 0$ şi prin urmare f este convexă pe $[-2, \infty)$.

PRO DIDACTICA VĂ UREAZĂ SUCCES LA BAC.
DE LA TOAMNĂ VĂ AŞTEPTĂM CU ÎNTREBĂRI DIN MATERIA DE FACULTATE.