BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 62

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 62

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) $\sin\frac{\pi}{2} + \cos\pi = 1 + (-1) = \boxed{0}$

(b) Cum $5^2 + 12^2 = 13^2$, triunghiul este dreptunghic cu ipotenuza de lungime 13. Atunci raza cercului circumscris este jumătate din ipotenuză, adică $\boxed{\frac{13}{2}}$.

(c) Aria triunghiului ABC este dată de formula $S = \frac{|\Delta|}{2}$, unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1 - (-3)\cdot 3 = 8\,.$$

Prin urmare, aria este $S = \frac{8}{2} = \boxed{4}$.

(d) Cu formula uzuală (teorema lui Pitagora), distanţa este

$$|AB| = \sqrt{(2-1)^2 + (0-3)^2} = \boxed{\sqrt{10}}$$

(e) Cum modulul unei fracţii este dat de raportul modulelor obţinem

$$\left|\frac{1-2i}{2+i}\right| = \frac{|1-2i|}{|2+i|} = \frac{\sqrt{1^2+(-2)^2}}{\sqrt{2^2+1^2}} = \boxed{1}\,.$$

(f) Folosind formula lui de Moivre, numărul complex se scrie sub forma

$$\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{15} = \cos\frac{15\cdot\pi}{3} + i\sin\frac{15\cdot\pi}{3} = \cos 5\pi + i\sin 5\pi = -1 + i\cdot 0 = -1\,,$$

deci partea sa reală este $\boxed{-1}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Un număr de forma $\sqrt{n}$, cu $n \in \mathbb{N}$, este număr raţional dacă şi numai dacă n este pătrat perfect. Între cele 123 de numere de la 1 şi 123 există 11 pătrate perfecte, anume $1 = 1^2, 4 = 2^2, 9 = 3^2, \ldots, 121 = 11^2$. Deci probabilitatea cerută este $\boxed{p = \frac{11}{123}}$.

(b) **Comentariu.** Ar fi fost de preferat ca enunţul să fie mai clar. Bănuim că propunătorul s-a gândit la:

Să se determine câte elemente are mulţimea $\{1, 3, 5, \ldots, 23\}$ *formată din termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice*.

Pentru acest enunţ, răspunsul este $\boxed{12}$, căci avem elementele $1 = 2 \cdot 1 - 1, 3 = 2 \cdot 2 - 1, 5 = 2 \cdot 3 - 1, \ldots, 23 = 2 \cdot 12 - 1$.

(c) Deoarece $a = \log_{\frac{1}{2}} 8 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = -3$ şi $b = \log_{\frac{1}{3}} 9 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = -2$, este clar că $\boxed{a < b}$.

(d) O mulţime de 5 elemente are $\boxed{C_5^3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{3! \cdot !2} = \boxed{10}$ submulţimi de 3 elemente.

(e) Toate cuvintele de forma cerută sunt *bacul*, *baclu*, *lbacu*, *ubacl*, *lubac*, *ulbac*, deci $\boxed{6}$ cuvinte.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Funcţia $f(x) = \boxed{(x-2)^2}$, are derivata $f'(x) = 2(x-2), \forall x \in \mathbb{R}$, deci are proprietatea că $f(2) = f'(2) = 0$.

(b) Şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, definit prin $a_n = \boxed{2 + \frac{1}{n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, este neconstant şi are limita 2. Un alt exemplu care satisface cerinţele enunţului este şirul $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, definit prin $\boxed{b_1 = 1}$ şi $\boxed{b_n = 2, \forall n \geq 2}$. Acest şir este neconstant (este staţionar!) şi are limita 2.

(c) Deoarece $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{1 + 0} = 2$, dreapta de ecuaţie $\boxed{y = 2}$ este asimptotă orizontală la graficul lui f către ∞.

(d) Funcţia constantă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \boxed{\frac{1}{4}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ evident satisface

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{1}{4}.$$

(e) Avem $f'(x) = 3x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$ şi $f''(x) = 6x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Pentru $x \leq 0$ avem $f''(x) \leq 0$, deci f este concavă pe $(-\infty, 0]$ şi pentru $x \geq 0$ avem $f''(x) \geq 0$, deci f este convexă pe $[0, \infty)$.

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Cum toate liniile matricei sunt identice, determinantul lui E este $\boxed{0}$ iar rangul este $\boxed{1}$.

(b) Prin calcul direct $E^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}} = 3E$

(c) Am văzut la punctul precedent că $E^2 = 3E$. Demonstrăm prin inducţie că $E^n = 3^{n-1}E$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Verificarea pentru $n = 1$ este evidentă $E^1 = 3^0 \cdot E$, iar pentru $n = 2$ avem conform (b) $E^2 = 3E$. Prespunem că $E^n = 3^{n-1}E$. Atunci $E^{n+1} = E^n \cdot E = 3^{n-1}E \cdot E = 3^{n-1} \cdot E^2 = 3^{n-1} \cdot 3E = 3^n E$. Conform principiului inducţiei, $E^n = 3^{n-1}E$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. In particular, $E^{2007} = \boxed{3^{2006}E}$.

(d) De exemplu, $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

(e) Orice matrice din G are 9 elemente, fiecare din ele putând fi alese în 3 moduri, G conţine $\boxed{3^9}$ elemente.

(f) Fie $A \in H$. Faptul că $EA = O_3$ este o consecinţă a faptului că suma elementelor pe fiecare coloană a lui A este 0. Faptul că $AE = O_3$ este o consecinţă a faptului că suma elementelor pe fiecare linie a lui A este 0.

(g) Cum $AE = EA$, putem folosi binomul lui Newton şi avem $(E + A)^{2007} = E^{2007} + C_n^1 E^{2006} A + C_n^2 E^{2006} A^2 + \ldots + C_n^{n-1} E A^{2006} + A^{2007} = E^{2007} + A^{2007}$, căci fiecare din termenii care conţine un produs $E^p A^q$ cu $p, q \in \mathbb{N}^*$ este nul conform (f).

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f'(x) = \boxed{e^{-1+x}} = f(x)$ şi $g'(x) = f'(x) - 1 = \boxed{e^{-1+x} - 1}$.

(b) Punctele critice ale lui g sunt date de ecuaţia $g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 1$. Cum pentru $x < 1$ avem $g'(x) < 0$, rezultă că g este strict descrescătoare pe $(-\infty, 1]$ şi cum pentru $x > 1$ avem $g'(x) > 0$, rezultă că g este strict crescătoare pe $[1, \infty)$. Prin urmare, $\boxed{x = 1}$ este punct de minim global al funcţiei g.

(c) Am văzut la punctul precedent că g este strict descrescătoare pe intervalul $[1, \infty)$. Atunci $g(x) > g(1) = 0$, pentru orice $x > 1$.

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{x-1} - x}{e^{x-1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{e^{x-1}}{e^{x-1}} - \dfrac{x}{e^{x-1}} \right) = 1 - \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^{x-1}} = 1 - \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{e^{x-1}} = 1 - 0 = \boxed{1}$. In final am folosit regula lui l'Hopital pentru o nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$.

(e) *Verificarea.* Pentru $n = 0$ avem din ipoteză, $x_0 = a > 1$.
Pasul de inducţie. Presupunem că $x_n > 1$. Atunci $x_{n+1} = f(x_n) = e^{x_n - 1} > e^{1-1} = 1$. Conform principiului inducţiei matematice, demonstraţia este încheiată.

(f) Fie $n \in \mathbb{N}$. Ştim de la punctul precedent că $x_n > 1$. Atunci folosind punctul (c), avem $x_{n+1} - x_n = f(x_n) - x_n = g(x_n) > 0$. Prin urmare, şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict crescător.

(g) Vom avea nevoie de următoarea
Lemă. Fie $\phi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$, două funcţii continue astfel ca $\phi(x) > \psi(x)$, $\forall x \in (a, b)$. Atunci $\displaystyle\int_a^b \phi(x)\,dx > \int_a^b \psi(x)\,dx$.
Demonstraţia lemei. Conform teoremei de medie pentru integrale, există un punct $c \in (a, b)$ astfel ca $\displaystyle\int_a^b (\phi(x) - \psi(x))\,dx = (b - a)(\phi(c) - \psi(c))$. Cum $c \in (a, b)$ avem $\phi(c) - \psi(c) > 0$, iar de aici rezultă afirmaţia din enunţul lemei.

Revenim la rezolvarea punctului (g). Conform punctului (c) avem $e^{x-1} > x \Leftrightarrow x + e^{x-1} > 2x \Leftrightarrow \dfrac{1}{x + e^{x-1}} < \dfrac{1}{2x}$ pentru orice $x > 1$. Vom aplica lema precedentă pe intervalul $(1, e)$ pentru $\phi(x) = \dfrac{1}{2x}$ şi $\phi(x) = \dfrac{1}{x + e^{x-1}}$. Obţinem

$$\int_1^e \frac{1}{x + e^{x-1}}\,dx < \int_1^e \frac{1}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\ln x\Big|_1^e = \frac{1}{2}(\ln e - \ln 1) = \frac{1}{2}.$$

Pro Didactica vă urează succes la BAC.
De la toamnă vă aşteptăm cu întrebări din materia de facultate.